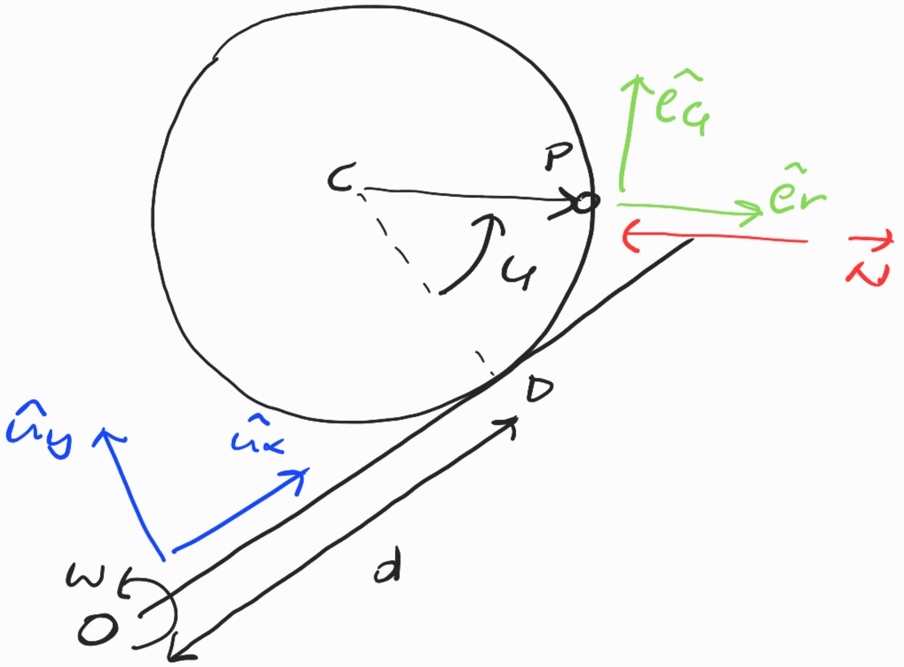
Mecánica Newtoniana 2S - Primer Parcial 30/9/24

Ej 7)



a) $\vec{r} = P - O = d\hat{u}_x + R\hat{u}_y + R\hat{e}_r$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = d\dot{\hat{u}}_x + R\dot{\hat{u}}_y + R\dot{\hat{e}}_r = \omega d\hat{u}_y - \omega R\hat{u}_x + (\omega + \dot{\varphi})R\hat{e}_\varphi}$$

$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \omega d\dot{\hat{u}}_y - \omega R\dot{\hat{u}}_x + R\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi + (\omega+\dot{\varphi})R\dot{\hat{e}}_\varphi$

$$\boxed{\vec{a} = -\omega^2 d\hat{u}_x - \omega^2 R\hat{u}_y + R\ddot{\varphi}\hat{e}_\varphi - (\omega+\dot{\varphi})^2 R\hat{e}_r}$$

b) 2da Ley de Newton a la partícula proyectada según $\hat{e}_\varphi$:

$(\vec{F} = m\vec{a}) \cdot \hat{e}_\varphi \quad : \quad \vec{a} \cdot \hat{e}_\varphi = 0$

$R\ddot{\varphi} - \omega^2 d\hat{u}_x \cdot \hat{e}_\varphi - \omega^2 R\hat{u}_y \cdot \hat{e}_\varphi = 0$

$$\boxed{R\ddot{\varphi} - \omega^2 d\cos\varphi - \omega^2 R\sin\varphi = 0}$$ Ec. de movimiento

c) Reescribimos la ecuación de movimiento:

$$\ddot{\varphi} - \frac{\omega^2 d}{R}\cos\varphi - \omega^2\sin\varphi = 0$$

Preintegrando llegamos a:

$$\frac{\dot\varphi^2}{2} - \omega^2 \frac{d}{R}\operatorname{sen}\varphi + \omega^2\cos\varphi = \omega^2$$

(donde usamos las condiciones iniciales $\varphi(0)=0$, $\dot\varphi(0)=0$)

$$\Rightarrow \boxed{\dot\varphi^2 = 2\omega^2\left(1-\cos\varphi + \frac{d}{R}\operatorname{sen}\varphi\right)}$$

El reposo relativo se alcanza para el ángulo en que $\dot\varphi=0$:

$$\boxed{1-\cos\varphi_d + \frac{d}{R}\operatorname{sen}\varphi_d = 0}$$

(que tiene como solución trivial el ángulo inicial)

d) 2^{da} ley de Newton según $\hat{e_r}$:

$$-N\hat{e_r} = m\vec{a}\cdot\hat{e_r}:$$

$$N = m\left[\omega^2 d\,\hat{u_x}\cdot\hat{e_r} + \omega^2 R\,\hat{u_y}\cdot\hat{e_r} + (\omega+\dot\varphi)^2 R\right],$$

$$\dot\varphi = + \sqrt{2\omega^2\left(1-\cos\varphi + \frac{d}{R}\operatorname{sen}\varphi\right)}$$

para el tramo $\varphi=0$ a $\varphi=\varphi_d$ $\left(\ddot\varphi(\varphi=0)=\omega^2\frac{d}{R}>0:\right.$ $\dot\varphi$ crece inicialmente y luego se anula para $\varphi=\varphi_d\Big)$

$$\boxed{N = m\left[\omega^2 d\operatorname{sen}\varphi - \omega^2 R\cos\varphi + \left(\omega+\sqrt{2\omega^2\left(1-\cos\varphi+\frac{d}{R}\operatorname{sen}\varphi\right)}\right)^2 R\right]}$$

Nota: si expresamos N en términos de $\dot\varphi$:

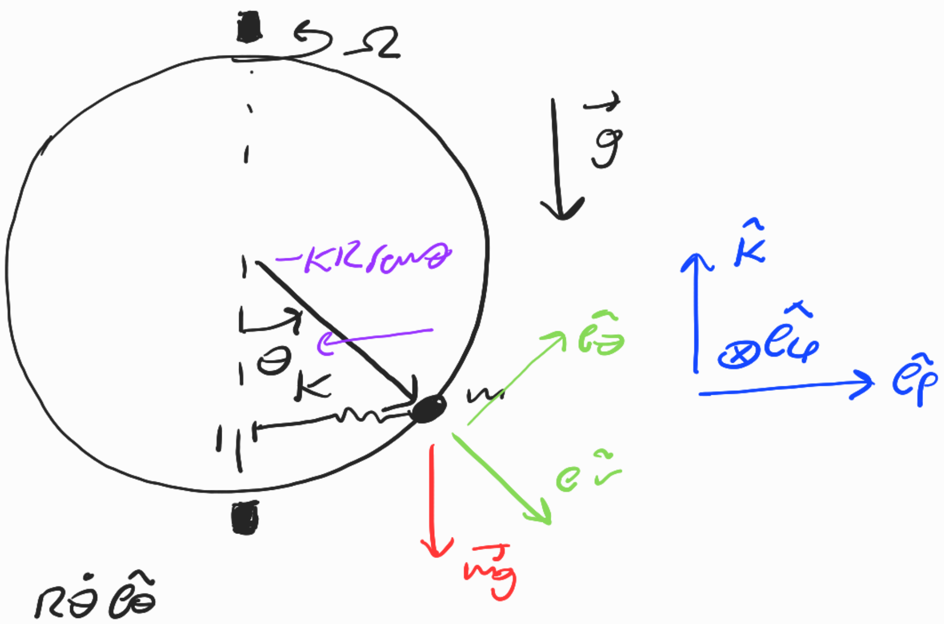
$$N = m\Big[\underbrace{\omega^2 d\operatorname{sen}\varphi - \omega^2 R\cos\varphi}_{\omega^2 R\left(\underbrace{\frac{d}{R}\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi}_{\left(\frac{1}{2}(\dot\varphi/\omega)^2-1\right)}\right)} + (\omega+\dot\varphi)^2 R\Big]$$

$$N = m\omega^2 R\left[\frac{1}{2}(\dot\varphi/\omega)^2 - 1 + (1+(\dot\varphi/\omega))^2\right] =$$

$$m\omega^2 R\left[\frac{3}{2}(\dot\varphi/\omega)^2 + 2\dot\varphi/\omega\right] = m\omega^2 R\left(\frac{\dot\varphi}{\omega}\right)\left[\frac{3}{2}\frac{\dot\varphi}{\omega}+2\right]$$

$\dot\varphi \geq 0$ para φ entre $\varphi=0$ y $\varphi=\varphi_d$, por lo que se verifica $N\geq 0$ para ese tramo ✓

Ej 2)



a) $\vec{v}' = R\dot\theta\,\hat{e}_\theta$

$\vec{a}' = -R\dot\theta^2\,\hat{e}_r + R\ddot\theta\,\hat{e}_\theta$

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_T$, $\vec{v}_T = \Omega R\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_\varphi$ (velocidad del pto. de la guía donde se encuentra la partícula)

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_c$, $\vec{a}_T = -\Omega^2 R\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_\rho$ (aceleración del pto. de la guía donde se encuentra la partícula)

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{v}'$, $\vec{\omega} = \Omega\hat{k}$

$\vec{a}_c = 2\Omega\,\dot\theta R\cos\theta\,\hat{e}_\varphi$

b) 2da ley de Newton a la partícula proyectada según $\hat{e}_\theta$ (dirección en la cual no hay fuerza reactiva ejercida por la guía):

$m\vec{a}\cdot\hat{e}_\theta = -mg\,\text{sen}\,\theta - KR\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$

$m(R\ddot\theta - \Omega^2 R\,\text{sen}\,\theta\,\hat{e}_\rho\cdot\hat{e}_\theta) = -mg\,\text{sen}\,\theta - KR\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$:

$$\boxed{\ddot\theta - \Omega^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + \frac{g}{R}\,\text{sen}\,\theta + \frac{K}{m}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 0}$$

c) La reacción ejercida por la guía se puede escribir como:

$\vec{N} = N_r\hat{e}_r + N_\varphi\hat{e}_\varphi$

Su potencia absoluta es:

$$\mathcal{P}_N = \vec{N}\cdot\vec{v} = N_\varphi v_\varphi = N_\varphi \Omega R \operatorname{sen}\theta \; ;$$

2ª Ley de Newton según $\hat{e}_\varphi$:

$$N_\varphi = m\vec{a}\cdot\hat{e}_\varphi = m a_\varphi = m\, 2\Omega\dot{\theta} R\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_N = 2m\,\Omega^2 R^2 \dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

d) Escribimos la Ec. de movimiento como:

$$\ddot{\theta} + f(\theta) = 0, \quad f(\theta) = \left(\frac{g}{R} - \Omega'^2\cos\theta\right)\operatorname{sen}\theta$$

(donde usamos $\Omega^2 = \frac{2K}{m}$, $\Omega'^2 = \Omega^2/2$)

Para las posiciones de equilibrio relativo: $\ddot{\theta} = 0 \leftrightarrow f(\theta) = 0$;

$$\left(\frac{g}{R} - \Omega'^2\cos\theta\right)\operatorname{sen}\theta = 0 \begin{cases} \operatorname{sen}\theta = 0 : \theta_{eq} = 0, \pi \\ \cos\theta_{eq} = \dfrac{g/R}{\Omega'^2}, \; \exists \text{ si } \Omega'^2 \geq g/R \end{cases}$$

estabilidad: $$\frac{df}{d\theta} = \left(\frac{g}{R} - \Omega'^2\cos\theta\right)\cos\theta + \Omega'^2\underbrace{\operatorname{sen}^2\theta}_{1-\cos^2\theta} =$$

$$= \left(\frac{g}{R} - 2\Omega'^2\cos\theta\right)\cos\theta + \Omega'^2$$

$$\left.\frac{df}{d\theta}\right|_{\theta_{eq}=0} = \frac{g}{R} - \Omega'^2 \geq 0 \text{ si } \Omega'^2 \leq g/R$$: $\theta_{eq}=0$ estable si $\Omega'^2 \leq g/R$

$$\left.\frac{df}{d\theta}\right|_{\theta_{eq}=\pi} = -\left(\frac{g}{R} + \Omega'^2\right) < 0$$: $\theta_{eq} = \pi$ inestable siempre

$$\left.\frac{df}{d\theta}\right|_{\cos\theta_{eq}=\frac{g/R}{\Omega'^2}} = -\frac{g}{R}\,\frac{g/R}{\Omega'^2} + \Omega'^2 \geq 0 \text{ si } \Omega'^2 \geq g/R :$$

$\theta_{eq} / \cos\theta_{eq} = \dfrac{g/R}{\Omega'^2}$ es estable cuando existe