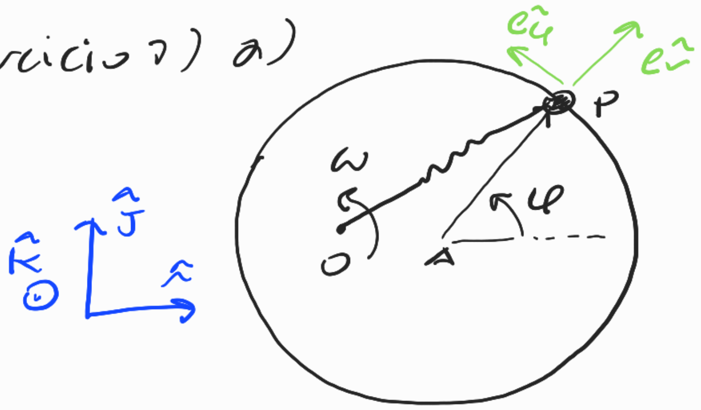
Mecánica Newtoniana, examen 27/12/24

Ejercicio 1) a)



$S': \{O, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \longrightarrow$ sistema solidario a la guía, cuya velocidad angular es $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v}' &= R\dot{\varphi}\,\hat{e_\varphi} \\ \vec{a}' &= -R\dot{\varphi}^2\,\hat{e_r} + R\ddot{\varphi}\,\hat{e_\varphi}\end{aligned}}$$

Teorema de Roberval: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v_T}$, $\vec{v_T} = \vec{\omega}\times(P-O)$;

$$P-O = R\hat{e_r} + \frac{R}{2}\hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = (\omega+\dot{\varphi})R\,\hat{e_\varphi} + \omega\frac{R}{2}\hat{j}$$

Teo. Coriolis: $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a_T} + \vec{a_C}$, $\vec{a_T} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times(P-O))$

$$\vec{a_T} = -\omega^2\left(R\hat{e_r} + \frac{R}{2}\hat{i}\right)$$

$$\vec{a_C} = 2\vec{\omega}\times\vec{v}' = -2\omega R\dot{\varphi}\,\hat{e_r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = -R\dot{\varphi}^2\hat{e_r} + R\ddot{\varphi}\hat{e_\varphi} - \omega^2\left(R\hat{e_r} + \frac{R}{2}\hat{i}\right) - 2\omega R\dot{\varphi}\,\hat{e_r}}$$

b) La ecuación de movimiento se puede obtener a partir de la 2da ley de Newton proyectada según $\hat{e_\varphi}$ ($\vec{N}\cdot\hat{e_\varphi} = 0$)

$(\vec{F} = m\vec{a})\cdot\hat{e_\varphi}$: $-K(P-O)\cdot\hat{e_\varphi} = m\vec{a}\cdot\hat{e_\varphi}$

$$-K\frac{R}{2}\hat{i}\cdot\hat{e_\varphi} = R\ddot{\varphi} - \omega^2\frac{R}{2}\hat{i}\cdot\hat{e_\varphi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{?}{2}\left(\omega^2 - \frac{K}{m}\right)\operatorname{sen}\varphi = 0}$$

c) $\ddot{\varphi} = 0$ corresponde a las posiciones de eq. relativo:

$$\left(\omega^2 - \frac{K}{m}\right)\operatorname{sen}\varphi = 0 \longrightarrow \omega^2 \neq \frac{K}{m} : \operatorname{sen}\varphi = 0 : \begin{cases} \varphi_{eq} = 0 \\ \varphi_{eq} = \pi \end{cases}$$

$\hookrightarrow \omega^2 = \frac{K}{m}$: $\ddot{\varphi} = 0 \ \forall \varphi$ (todas las posiciones son de eq. [marginalmente est.])

Estabilidad:

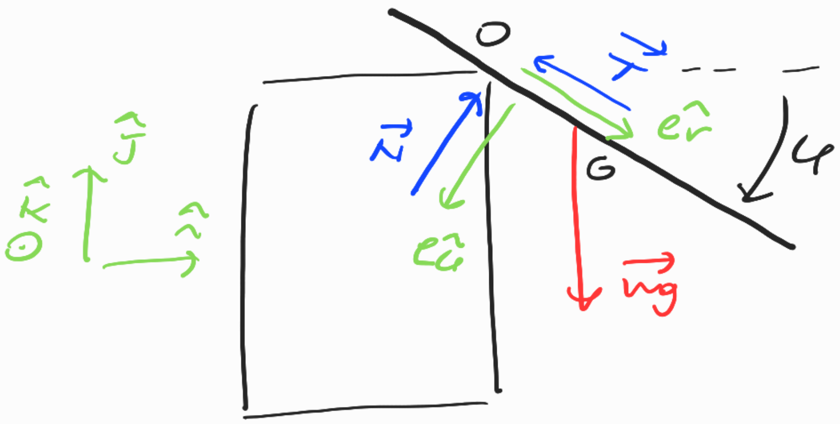
La ec. de movimiento se puede interpretar como:

$$\ddot{\varphi} + \frac{dU_{eff}}{d\varphi} = 0 \qquad \left(\frac{dU_{eff}}{d\varphi} = \frac{?}{2}\left(\omega^2 - \frac{K}{m}\right)\operatorname{sen}\varphi \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2U_{eff}}{d\varphi^2} = \frac{?}{2}\left(\omega^2 - \frac{K}{m}\right)\cos\varphi =$$

$$\begin{cases} (\varphi_{eq} = 0) \quad \frac{?}{2}\left(\omega^2 - \frac{K}{m}\right) > 0 \text{ si } \omega^2 > \frac{K}{m} : \varphi_{eq} = 0 \text{ estable si } \omega^2 > \frac{K}{m} \\ (\varphi_{eq} = \pi) \quad \frac{?}{2}\left(\frac{K}{m} - \omega^2\right) > 0 \text{ si } \omega^2 < \frac{K}{m} : \varphi_{eq} = \pi \text{ estable si } \omega^2 < \frac{K}{m} \end{cases}$$

Ejercicio 2) a)



Mientras la barra no se deslice: $\vec{v_O} = 0$

$\Rightarrow \mathcal{P}(\vec{N}) = \mathcal{P}(\vec{T}) = 0$

$\Rightarrow E = cte.$

$$T + U = cte \;,\quad T = \frac{1}{2} I_{O,\hat{k}} \dot{\varphi}^2 \;,\quad I_{O,\hat{k}} = \int_{-\frac{\ell}{3}}^{\frac{2\ell}{3}} \left(\frac{m}{\ell}\right) x^2\, dx = \frac{m\ell^2}{9}$$

$$U = -mg\,|G-O| \operatorname{sen}\varphi \;,\quad |G-O| = \frac{\ell}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{9}\right)\dot{\varphi}^2 - mg\frac{\ell}{6}\operatorname{sen}\varphi = E(0) = 0$$

$\varphi(0) = 0$

$\dot{\varphi}(0) = 0$

$$\boxed{\dot{\varphi}^2 = 3\, g/\ell \operatorname{sen}\varphi} \quad (i)$$

b) 2da Cardinal a la barra:

$\hat{e_r}$) $\quad -m\frac{\ell}{6}\dot{\varphi}^2 = -T + mg\operatorname{sen}\varphi \quad (ii)$

$\hat{e_\varphi}$) $\quad m\frac{\ell}{6}\ddot{\varphi} = -N + mg\cos\varphi \quad (iii)$

derivando (i) en el tiempo: $\quad \ddot{\varphi} = \frac{3}{2}\, g/\ell \cos\varphi \quad (iv)$

sustituyendo (i) en (ii) y (iv) en (iii):

$$T = \frac{3}{2}\, mg\operatorname{sen}\varphi \;;$$

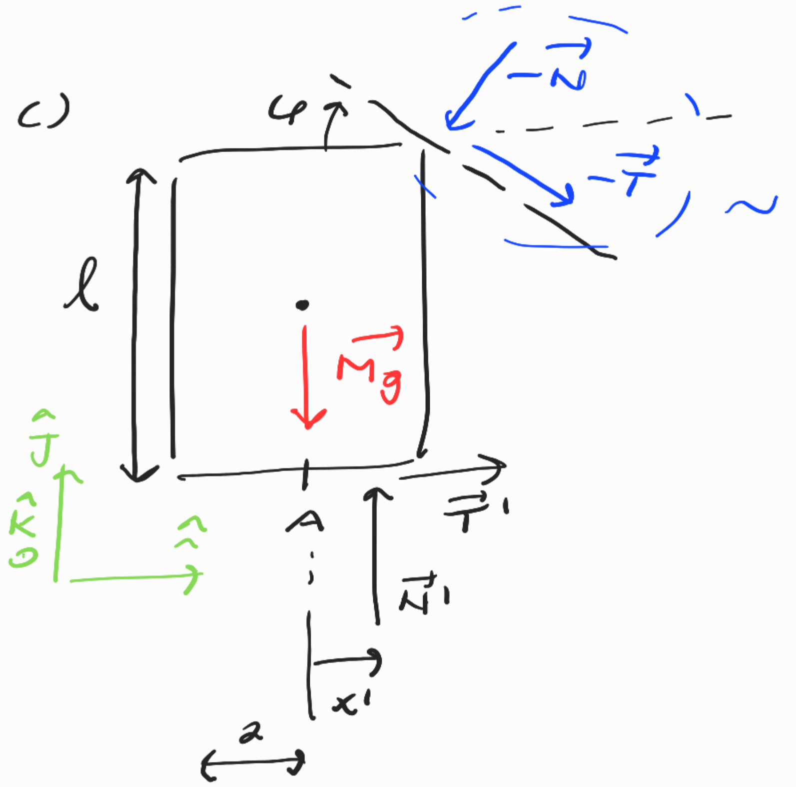
$$N = \frac{3}{4}\, mg\cos\varphi$$

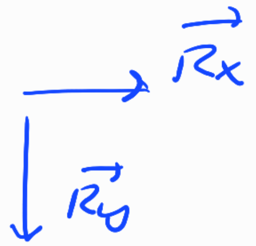
mientras la barra no se deslice se cumple:

$$|T| \le f_E |N| \ : \ tg\varphi \le \frac{1}{2} f_E = \frac{1}{\sqrt{3}} \ : \ \boxed{\varphi_d = \frac{\pi}{6}}$$

ángulo de desliz.

c)





$$R_x = T\cos\varphi - N\sin\varphi = \frac{3}{4} mg \sin\varphi\cos\varphi$$

$$R_y = T\sin\varphi + N\cos\varphi = \frac{3}{4} mg(1+\sin^2\varphi)$$

1era Cardinal a la placa según $\hat{j}$: $N' = Mg + R_y$ (>0 ✓)

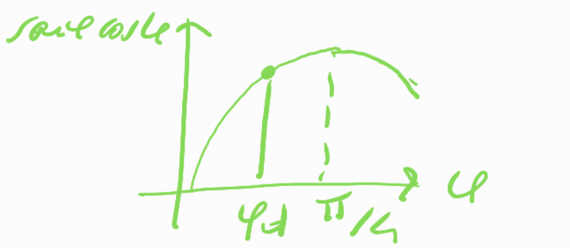
2da Cardinal desde A : $x'N' = l R_x + a R_y$

Para que la placa no vuelque se debe verificar: $-a \le x' \le a$:

$$-a \le \frac{lR_x + aR_y}{Mg+R_y} \le a \ : \ lR_x \le Mga \ :$$

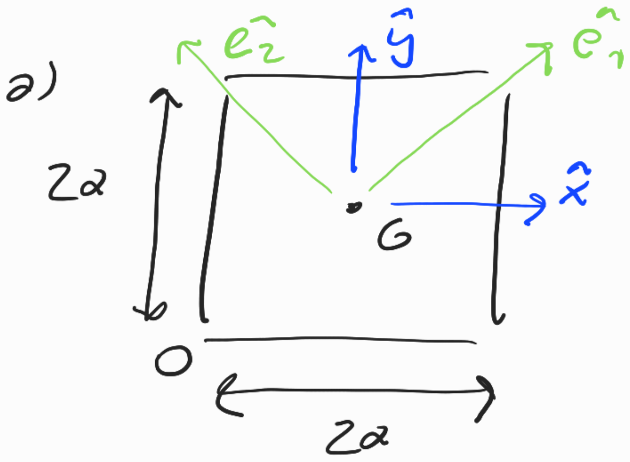
$$l\,\frac{3}{4} mg \sin\varphi\cos\varphi \le Mga \ : \ a \ge \frac{3}{4}\frac{m}{M}\, l \underbrace{\sin\varphi\cos\varphi}_{\text{máximo para } \varphi_d}$$

$$a \ge \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{16}\frac{m}{M}\, l = a_{mín}}$$



Ejercicio 3)

a)



$(C=G)$

$\hat{x}$ e $\hat{y}$ son ejes ppales. para $\mathbb{I}_G$ con momentos de inercia ppales:

$$I_{G,\hat{x}} = I_{G,\hat{y}} =$$

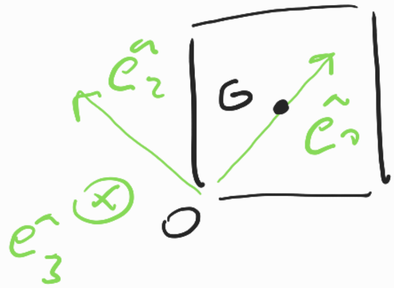
$$\int_{-a}^{a} dy \int_{-a}^{a} dx \, \frac{m}{(2a)^2} x^2 = \frac{ma^2}{3}$$

Luego, una combinación lineal de ellos también es ppal!

$$\mathbb{I}_G(\alpha\hat{x}+\beta\hat{y}) = \alpha \underbrace{\mathbb{I}_G\hat{x}}_{I_{G,\hat{x}}\hat{x}} + \beta \underbrace{\mathbb{I}_G\hat{y}}_{I_{G,\hat{y}}\hat{y}} = I_{G,\hat{x}}(\alpha\hat{x}+\beta\hat{y})$$

En particular, $\hat{e_1}$ y $\hat{e_2}$ son ejes ppales. para $\mathbb{I}_G$;

$\mathbb{I}_O$:

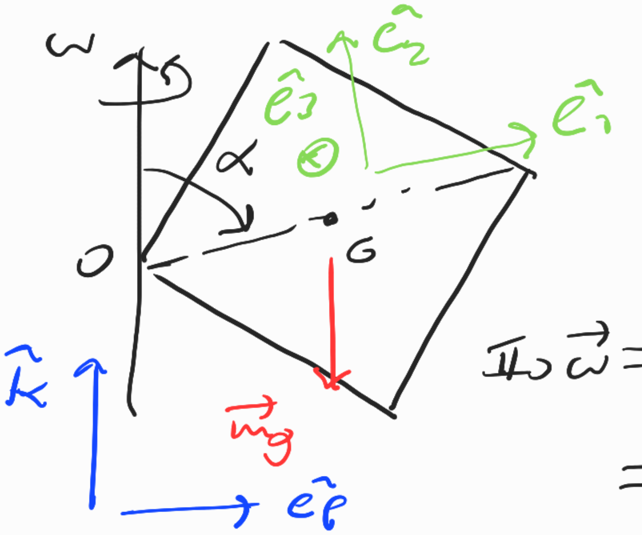


$\hat{e_2}, \hat{e_3}$ son ppales. por simetría especular, $\hat{e_1}$ también por completar la base!

$$\mathbb{I}_O^{\{\hat{e_1},\hat{e_2},\hat{e_3}\}} = \begin{pmatrix} I_{O,\hat{e_1}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{O,\hat{e_2}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{O,\hat{e_1}}+I_{O,\hat{e_2}} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} I_{O,\hat{e_1}} = I_{G,\hat{e_1}}, \\ I_{O,\hat{e_2}} = \underbrace{I_{G,\hat{e_2}} + m(\sqrt{2}a)^2}_{\text{Steiner}} \end{array} \right)$$

$$= \frac{ma^2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$



$$\vec{L}_O = \mathbb{I}_O \vec{\omega},$$

$$\vec{\omega} = \omega\cos\alpha\,\hat{e}_1 + \omega\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{e}_2$$

$$\mathbb{I}_O\vec{\omega} = \omega\cos\alpha\,\mathbb{I}_O\hat{e}_1 + \omega\,\text{sen}\,\alpha\,\mathbb{I}_O\hat{e}_2$$

$$= \omega\cos\alpha\, I_{O,e_1}\hat{e}_1 + \omega\,\text{sen}\,\alpha\, I_{O,e_2}\hat{e}_2$$

$$\therefore \boxed{\vec{L}_O = \frac{ma^2\omega}{3}\left(\cos\alpha\,\hat{e}_1 + 7\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{e}_2\right)}$$

b) 1era cardinal a la placa: $m\vec{a}_G = \vec{R} - mg\hat{k}$ fuerza resultante de la soldadura

$$\vec{a}_G = -\omega^2\sqrt{2}a\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{e}_\rho;\quad \boxed{\vec{R} = mg\hat{k} - \omega^2\sqrt{2}a\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{e}_\rho}$$

2da cardinal desde O: $\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^{(ext)} =$

$$= \vec{M}_O^{(soldadura)} + mg\sqrt{2}a\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{e}_3;$$

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{ma^2}{3}\omega\Big(\cos\alpha\,\underbrace{\dot{\hat{e}}_1}_{\omega\hat{k}\times\hat{e}_1 = \omega\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{e}_3} + 7\,\text{sen}\,\alpha\,\underbrace{\dot{\hat{e}}_2}_{-\omega\cos\alpha\,\hat{e}_3}\Big) =$$

$$= -2ma^2\omega^2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\,\hat{e}_3$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_O^{(soldadura)} = -\left[2ma^2\omega^2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + mg\sqrt{2}a\,\text{sen}\,\alpha\right]\hat{e}_3}$$

c) $|\vec{M}_O^{(soldadura)}|_{\alpha=\pi/4} = ma^2(\omega^2 + g/a)$

$< M_O^{max}$ si $\boxed{\omega^2 < \frac{M_O^{max}}{ma^2} - g/a}$ (si $g/a \geq \frac{M_O^{max}}{ma^2}$, se rompe aún sin rotar)