Mecánica Newtoniana

Primer Parcial, 25 de setiembre de 2023

- Duración de la prueba: ***3 horas***.
- Prueba ***individual y sin material.***
- Justifique claramente todas sus respuestas.

Ejercicio 1 [20 puntos] Considere un tubo de largo R que gira con velocidad angular constante Ω con respecto a un eje perpendicular a él por uno de sus extremos. Una partícula de masa m puede deslizarse sin fricción en el interior del tubo mientras se sujeta al extremo opuesto al centro de giro mediante un resorte de constante elástica k y longitud natural R. Inicialmente la partícula se encuentra en reposo con respecto al tubo y un hilo ideal y de largo $R/2$ la sujeta al centro de giro.

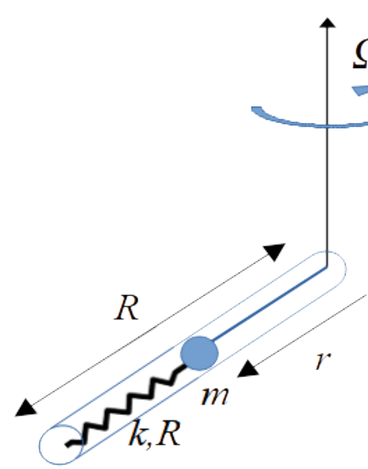
a. Si el hilo puede soportar una tensión máxima $T_{max} = kR$ sin romperse, determine el rango de valores de Ω que asegura que la partícula se mantenga en reposo con respecto al tubo.

Consideramos de ahora en más que $\Omega = 2\sqrt{k/m}$ y que la condiciones iniciales son las especificadas previamente (es decir, la partícula parte desde $r = R/2$ en reposo con respecto al tubo).

b. Halle la ecuación de movimiento que satisface la coordenada radial r. Determine además la aceleración de la partícula relativa al tubo en el instante inicial.

c. Determine la ley horaria $r = r(t)$.

d. Halle la velocidad absoluta de la partícula una vez que alcanza $r = 3R/4$ y el trabajo realizado por la reacción normal ejercida por el tubo sobre la partícula entre el instante inicial y ese instante.



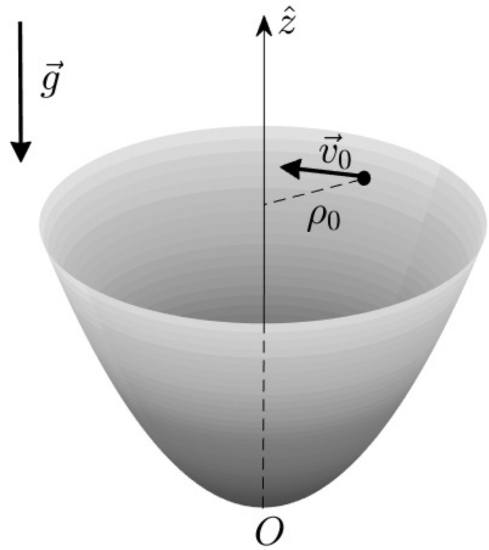
Ejercicio 2 [20 puntos] Una partícula de masa m se mueve en contacto con la cara interna de un paraboloide de eje de revolución vertical y ecuación $z = \alpha\rho^2$ ($\alpha > 0$), siendo ρ la distancia al eje y z la altura con respecto al plano horizontal que pasa por el punto más bajo O del paraboloide. El contacto entre la masa y el paraboloide carece de fricción. Inicialmente la partícula se encuentra en $\rho = \rho_0$ con velocidad horizontal de módulo v_0.

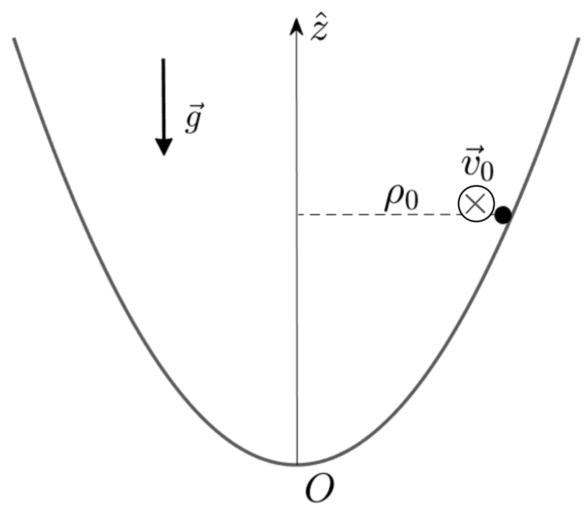
a. Pruebe que la componente vertical del momento angular visto desde O ($L_Z = \vec{L}_O \cdot \hat{z}$) y la energía mecánica de la partícula se conservan durante su movimiento.

b. Muestre que la distancia ρ de la partícula al eje verifica una ecuación de la forma $\dot{\rho}^2 = f(\rho)$.

c. Si $v_0 = \sqrt{\alpha g}\rho_0$, halle la distancia máxima y la distancia mínima al eje que puede alcanzar la partícula durante su movimiento.

d. Determine el valor de v_0 necesario para que la partícula describa una órbita circular.





Datos que pueden ser útiles:

- $$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- $$ch^2(x) - sh^2(x) = 1, \quad sh(2x) = 2sh(x)ch(x)$$