Mecánica Newtoniana - Examen, 28 de enero de 2021

Ejercicio 1

a) $\vec{L_O} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{p} = m\vec{v}$

derivando $\vec{L_O}$ en el tiempo: $\dot{\vec{L_O}} = \underbrace{\underbrace{\dot{\vec{r}}}_{\vec{v}} \times \underbrace{\vec{p}}_{m\vec{v}}}_{=0} + \vec{r} \times \underbrace{\dot{\vec{p}}}_{= \vec{F}}$ (2ª ley de Newton)

$\vec{F} = f\hat{e_r}$; $\vec{r} = r\hat{e_r} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = 0$

$\Rightarrow \dot{\vec{L_O}} = \vec{r} \times \vec{F}$; $\vec{F}$ es central :

$\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{L_O}} = 0} \longleftrightarrow \vec{L_O}$ se conserva

b.I) 2ª ley de Newton según $\hat{e_r}$: $f(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$ $\quad f(r_0) = -mr_0\dot{\theta}^2$

buscamos una órbita circular, $r = r_0 \ \forall t$: $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$

por la conservación de ℓ, el movimiento debe ser uniforme ($\ell = mr^2\dot{\theta} = mr_0^2\dot{\theta}$ $\Rightarrow \dot{\theta} = cte = \dot{\theta}_0$)

A su vez, el movimiento

$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = v_c/r_0$: $\underbrace{f(r_0)}$ $= -mr_0(v_c/r_0)^2$

$$-\frac{K}{r_0^2} - \frac{K'}{r_0^3} = -\frac{mv_c^2}{r_0} \longrightarrow r_0 = K'/K \qquad \boxed{v_c^2 = \frac{2K^2}{mK'}}$$

• Período del movimiento : $T = 2\pi/\dot{\theta} = \dfrac{2\pi r_0}{v_c} = 2\pi \dfrac{K'}{K}\dfrac{1}{v_c} = \boxed{\pi\sqrt{\dfrac{2mK'^3}{K^4}}}$

b.II) $v = \sqrt{2}v_c$: $\ell = mr_0v \Rightarrow \ell^2 = m^2r_0^2v^2 = m^2r_0^2\,2v_c^2 = 4mK'$ $\quad (r_0 = K'/K)$

Binet: $\dfrac{F(u)}{\cancel{m}} = a_r = -\dfrac{\ell^2u^2}{m\cancel{m}}(u''+u) = -4K'u^2(u''+u)$

$F(u) = \cancel{-}K\cancel{u^2} \cancel{-} K'u^3 = \cancel{-}4K'\cancel{u^2}(u''+u)$: $u'' + \dfrac{3}{4}u = \dfrac{K}{4K'} = \dfrac{1}{4r_0}$;

$u(\theta) = u_H(\theta) + u_P$; $u_H(\theta)$: $u_H'' + \dfrac{3}{4}u_H = 0$: $u_H = \alpha\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\theta + \beta\,\text{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\theta$

$u_P = cte$: $\dfrac{3}{4}u_P = \dfrac{1}{4r_0}$: $u_P = \dfrac{1}{3r_0}$

$\Rightarrow u(\theta) = \alpha\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\theta + \beta\,\text{sen}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\theta + \dfrac{1}{3r_0}$ $\qquad \boxed{u(\theta) = \dfrac{1}{3r_0}\left(1 + 2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\theta\right)}$

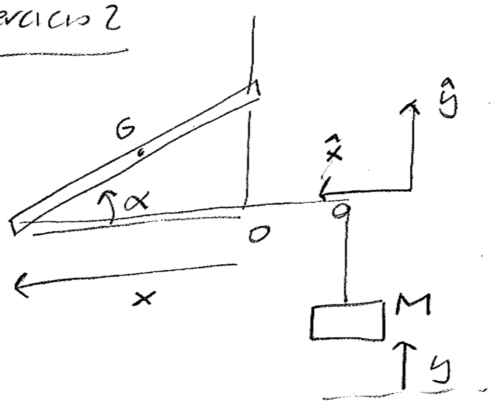
$u(\theta=0) = \dfrac{1}{r_0}$

$u'(\theta=0) = 0$ $\quad (\dot{r}(\theta=0) = 0)$

(luego $r(\theta) = 1/u(\theta)$)

Ejercicio 2

a)



• Se trata de un sistema con un grado de libertad (consideremos el ángulo α); vamos a escribir x (coordenada del extremo horizontal de la barra) e y (altura de M medida desde su posición inicial) en función de α: $x = 2l\cos\alpha$

hilo de largo constante: $x - y = x(t=0) - y(t=0)$
$= 2l\cos\alpha(t=0)$

La energía potencial (gravitatoria) del sistema es: $(\alpha_0 = \alpha(t=0) = \pi/4)$

$$U = mg\,y_G + Mg\,y = mgl\,\text{sen}\,\alpha + Mg\,2l(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$

• El sistema permanecerá en reposo si la configuración del mismo es de eq. $\leftrightarrow \left.\dfrac{dU}{d\alpha}\right|_{\alpha_0} = 0$:

$$\left.\left(mgl\cos\alpha - 2Mgl\,\text{sen}\,\alpha\right)\right|_{\alpha=\alpha_0} = 0; \quad M = \frac{m}{2\,\text{tg}\,\alpha_0} = \boxed{m/2}$$

b.I) La energía del sistema es:

$$E = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + Mgy + \frac{1}{2}m v_G^2 + \frac{1}{2}I_G\dot{\alpha}^2 + mgl\,\text{sen}\,\alpha \quad ; \quad M = m/4, \quad I_G = \frac{ml^2}{3}$$

$$\dot{y} = \dot{x} = -2l\,\text{sen}\,\alpha\,\dot{\alpha}$$

$$v_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 = (\dot{x}/2)^2 + \dot{y}_G^2 = l^2\dot{\alpha}^2$$

$$E = \frac{1}{2}m\,l^2\,\text{sen}^2\alpha\,\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}mgl(\cos\alpha - \cos\alpha_0) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\alpha}^2 + mgl\,\text{sen}\,\alpha$$

y como se conserva: $E = E(t=0) = mgl\,\text{sen}\,\alpha_0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}ml^2\,\text{sen}^2\alpha\,\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}mgl(\cos\alpha - \cos\alpha_0) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\alpha}^2 + mgl(\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\alpha_0) = 0$$

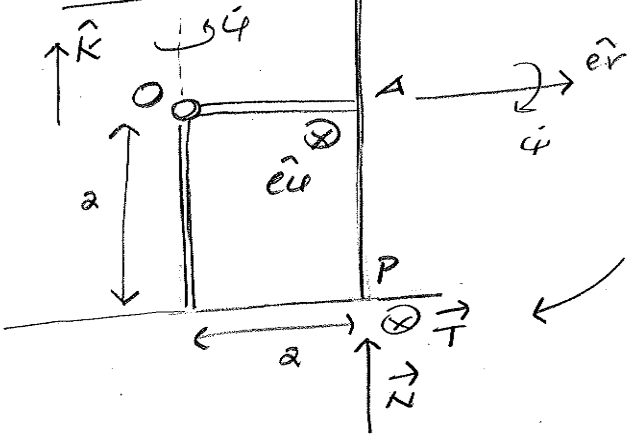
$$\Rightarrow \dot{\alpha}^2 = \frac{g/l\left[2(\text{sen}\,\alpha_0 - \text{sen}\,\alpha) + \cos\alpha_0 - \cos\alpha\right]}{(4/3 + \text{sen}^2\alpha)} = f(\alpha)$$

b.II) derivando la anterior: $2\cancel{\dot{\alpha}}\,\ddot{\alpha} = \dfrac{df}{d\alpha}\cancel{\dot{\alpha}}$: $\ddot{\alpha} = \dfrac{1}{2}\dfrac{df}{d\alpha}$

$$\ddot{\alpha}(t=0) = \frac{1}{2}\left.\frac{df}{d\alpha}\right|_{\alpha_0} = g/l\left\{\frac{-2\cos\alpha_0 + \text{sen}\,\alpha_0}{(4/3 + \text{sen}^2\alpha_0)}\right\} = -\frac{1/\sqrt{2}}{(4/3 + 1/2)}\,g/l$$

(<0, como es esperable ya que $M < M_{eq}$ y la barra tiende a bajar)

Ejercicio 3



El punto P, como parte del rígido, tiene velocidad inicial nula; en cambio, como parte del plano: $\vec{v}_P\,(\text{plano}) = a\Omega\,\hat{e_\varphi}$: el rígido desliza desde el comienzo y la fricción ejercida por el plano sobre el mismo tiene el sentido indicado en este diagrama

a) $\vec{L}_O = \mathbb{I}_O\,\vec{\omega} \qquad (\vec{v}_O = 0)$

$\vec{\omega} = \dot\varphi\,\hat{k} + \dot\psi\,\hat{e_r}$

$$\mathbb{I}_O^{\{\hat{e_r},\hat{e_\varphi},\hat{k}\}} = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{4} + ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{4} + ma^2 \end{pmatrix} = \frac{ma^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_O = \frac{ma^2}{2}\left(\frac{5}{2}\dot\varphi\,\hat{k} + \dot\psi\,\hat{e_r}\right)}$$

b) $\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^{(ext)} = a(\hat{e_r} - \hat{k}) \times (T\hat{e_\varphi} + N\hat{k}) + mga\,\hat{e_\varphi} \qquad \underset{=}{(T = fN)}$

$(\dot{O} = 0)$

$$= afN\,\hat{e_r} + a(mg - N)\,\hat{e_\varphi} + afN\,\hat{k}$$

Por otro lado: $\dot{\vec{L}}_O = \frac{ma^2}{2}\left(\frac{5}{2}\ddot\varphi\,\hat{k} + \ddot\psi\,\hat{e_r} + \dot\psi\underbrace{\dot{\hat{e_r}}}_{\dot\varphi\hat{e_\varphi}}\right) = \frac{ma^2}{2}\left(\frac{5}{2}\ddot\varphi\,\hat{k} + \ddot\psi\,\hat{e_r} + \dot\psi\dot\varphi\,\hat{e_\varphi}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{e_r}) \; afN = \frac{ma^2}{2}\ddot\psi & (i) \\ \hat{e_\varphi}) \; a(mg - N) = \frac{ma^2}{2}\dot\psi\dot\varphi & (ii) \\ \hat{k}) \; afN = \frac{ma^2}{2}\left(\frac{5}{2}\ddot\varphi\right) & (iii) \end{cases}$$

Entre (i) y (iii): $\boxed{\ddot\psi = \frac{5}{2}\ddot\varphi}$ (I)

Elimino N entre (i) y (ii): $\boxed{f\left(amg - \frac{ma^2}{2}\dot\psi\dot\varphi\right) = \frac{ma^2}{2}\ddot\psi}$ (II)

(alternativamente a lo anterior: integro (I) en el tiempo $\dot\psi = \frac{5}{2}\dot\varphi$ (iv) y sustituyo (iv) y (iii) en (ii): $\ddot\varphi + f\dot\varphi^2 = \frac{4}{5}fg/a$ (II'))