

## Mecánica Newtoniana. Examen: 23/12/2022

## Ejercicio 1.

Una masa puntual  $m$  se mueve enhebrada en un guía circular lisa (**vínculo bilateral**) de radio  $R$ . La guía rota según un eje  $\hat{k}$  perpendicular al plano que contiene a la guía. Un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural nula une a la partícula con el eje de giro (ver figura 1). La velocidad angular es  $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$  con  $\omega > 0$  constante. Se sabe que  $\frac{k}{m} \neq \omega^2$ . En el sistema **no actúa el peso**.

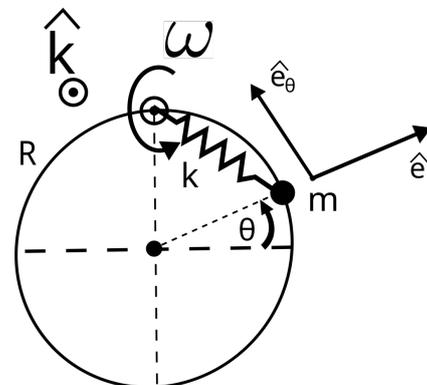


Figura 1:

- Escriba la ecuación de movimiento relativo de la masa  $m$  en función de la coordenada  $\theta$ .
- Determine las posiciones de equilibrio relativo y estudie su estabilidad, según los posibles valores de  $\omega$ .
- Si ahora se sabe que  $\frac{k}{m} < \omega^2$  y en el instante inicial  $\theta(0) = 0$  y  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$  ( $\dot{\theta}_0 > 0$ ), determine la condición que debe cumplir  $\dot{\theta}_0$  para que la partícula no llegue a  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

## Ejercicio 2.

Una placa rectangular de masa  $m$  está apoyada sobre un plano horizontal rugoso de coeficiente de rozamiento estático  $\mu$ . La placa tiene altura  $4a$  y ancho  $2a$ . Una barra homogénea de igual masa  $m$  y longitud  $2L$  se mueve bajo la acción del peso girando libremente en torno a uno de sus extremos gracias a una articulación cilíndrica lisa solidaria al bloque y ubicada en el punto medio de su borde superior como muestra la figura 2. Sea  $\theta$  el ángulo entre la barra y la vertical. Inicialmente la barra se suelta desde el reposo con  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Suponiendo que la placa se mantiene estática apoyada sobre el plano:

- Determine la ecuación de movimiento para la barra.
- Escriba las fuerzas reactivas que están aplicadas sobre la barra en el punto de unión con la placa en función de  $\theta$  y los otros parámetros del sistema.

Ahora estudiaremos el sistema total durante el movimiento de la barra en el rango  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ :

- Suponiendo que la placa no desliza, encuentre la condición algebraica sobre la coordenada  $\theta$  para que la placa no vuelque.
- Suponiendo que la placa no vuelca, encuentre la condición algebraica sobre la coordenada  $\theta$  para que la placa no deslice.

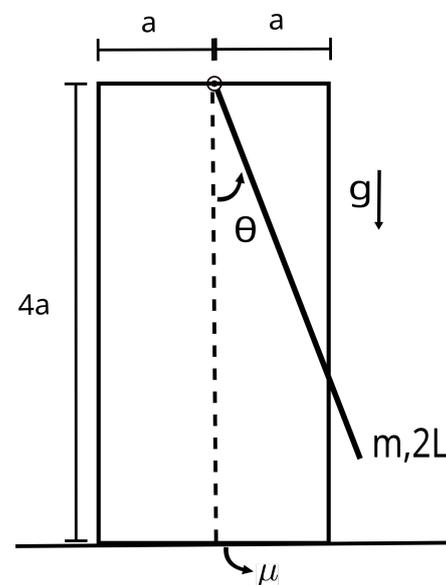


Figura 2:

**Ejercicio 3.**

Una placa rectangular homogénea de aristas de longitud  $2a$  y  $4a$ , y masa  $m$  está **rígidamente unida** por uno de sus vértices  $O$  a un eje vertical sin masa solidario a un sistema inercial. La arista  $OA$  tiene longitud  $2a$  y se encuentra en un plano horizontal definido por los versores  $\hat{I}$  y  $\hat{J}$ . Además, el plano de la placa forma un ángulo  $\alpha$  con el eje  $\hat{k}$  como muestra la figura 3. El conjunto gira con velocidad angular  $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ ,  $\omega$  constante.

- a) Escriba el momento angular de la placa respecto al punto  $O$ ,  $\vec{L}_O$ .
- b) Determine los momentos reactivos sobre la placa en el punto  $O$ .

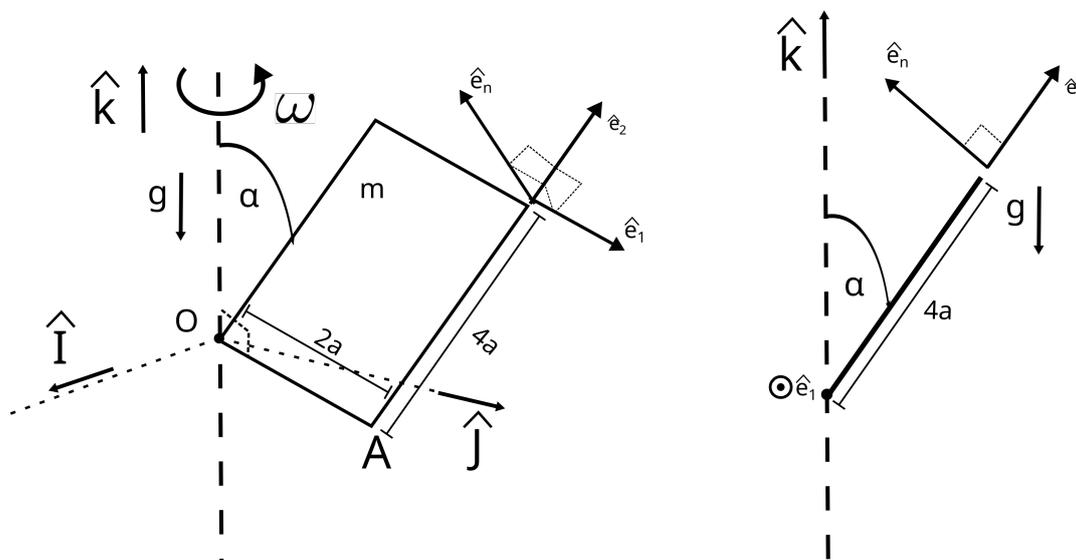


Figura 3:

Nota: El tensor de inercia de la placa rectangular desde el centro de masa en la base  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_n\}$  es:

$$\mathcal{I}_G = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} h^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + h^2 \end{pmatrix}$$

