Mecánica Newtoniana. Examen: 16/02/2023

Ejercicio 1.

Una masa puntual m se mueve enhebrada en un guía con forma de aro circular liso (**vínculo bilateral**) de masa despreciable y radio R. La **guía rota libremente según un eje** $\hat{k}$ tangente a la guía por el punto O (ver figura 1). Se estudiará el sistema conformado por la guía + la partícula. Se sabe que en $t = 0$: $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$ con $\dot{\varphi}_0 > 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\theta(0) = 0$.

a) Calcule el momento angular del sistema respecto al punto O, $\vec{L}_o$.

b) Identifique las cantidades conservadas, justifique su conservación y calcúlelas en función de los datos del problema y de las coordenadas elegidas.

c) Obtenga una ecuación del tipo $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$.

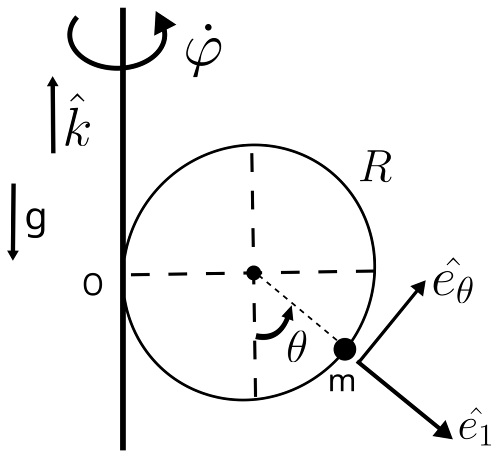

Figura 1:

Ejercicio 2.

El rígido de la figura 2 está compuesto por un disco de masa despreciable y radio R que contiene una masa puntual m incrustada (soldada) en su borde. Este rígido está apoyado sobre una placa horizontal rugosa de coeficiente de rozamiento estático μ. La placa horizontal se mueve en la dirección $\hat{i}$ con aceleración $\vec{a} = a\hat{i}$ (a constante) respecto a un sistema de referencia inercial, como muestra la figura 2.

Suponiendo que el rígido compuesto rueda sin deslizar sobre la placa y definiendo la coordenada x' con origen en O' en el sistema solidario a la placa (ver figura 2):

a) Obtenga la aceleración absoluta del centro de masas del rígido compuesto.

b) Escriba la ecuación de movimiento del rígido compuesto para la coordenada θ.

c) Encuentre las condiciones que debe verificar a y μ para que el rígido se encuentre en equilibrio relativo sobre el plano en $\theta = \frac{\pi}{4}$.

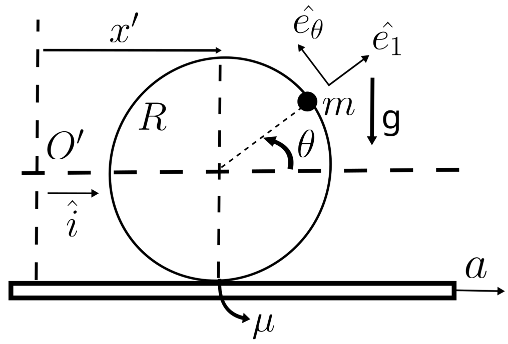

Figura 2:

Ejercicio 3.

Una placa rectangular homogénea de aristas de longitud $2a$ y $4a$, y masa m está unida por el punto O de una de sus aristas horizontales de largo $4a$ a un eje vertical $\hat{k}$. La unión se logra mediante **una articulación cilíndrica lisa de eje** $\hat{e}_1$. Sea θ al ángulo entre la placa y el eje $\hat{k}$, como muestra la figura 3. La articulación en O gira con velocidad angular $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$, con ω constante.

a) Calcule el momento angular de la placa respecto al punto O, $\vec{L}_o$.

b) Obtenga la ecuación de movimiento de la placa en función de la coordenada θ.

c) Encuentre los puntos de equilibrio relativo de la placa y estudie su estabilidad en función de los parámetros del sistema.

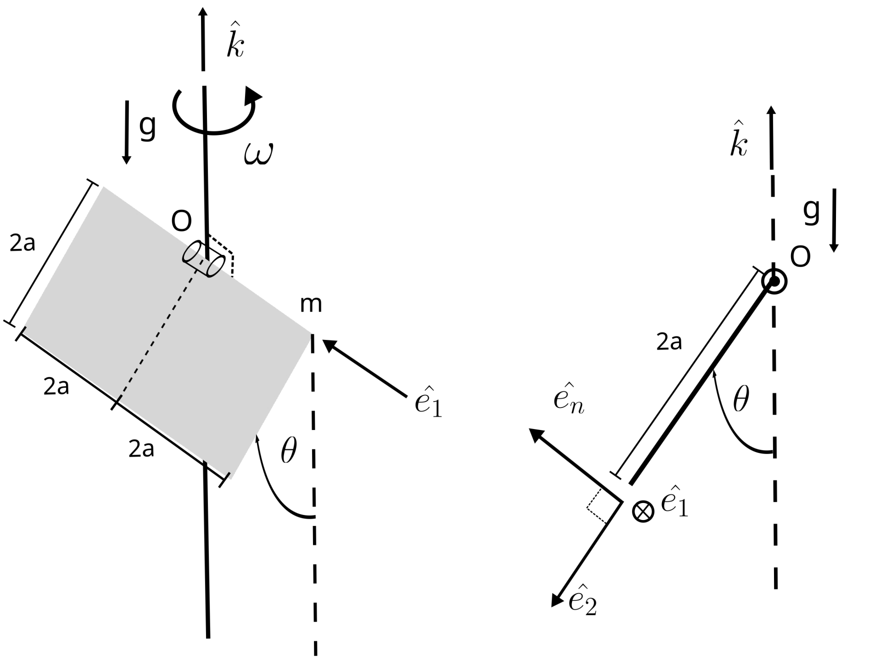

Figura 3:

Nota: El tensor de inercia de la placa rectangular desde el centro de masa en la base $\{\hat{e_1},\hat{e_2},\hat{e_n}\}$ es:

$$\mathcal{I}_G = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & h^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2+h^2 \end{pmatrix}$$