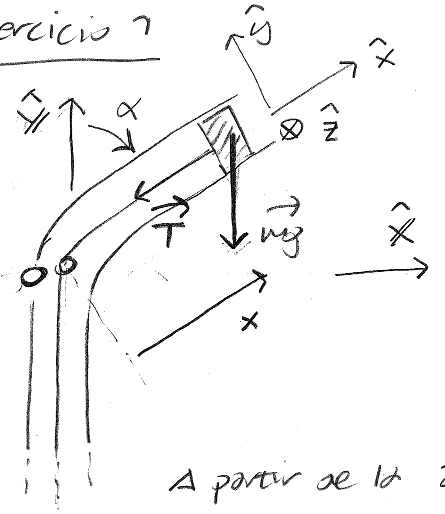
Mecánica Newtoniana, Examen, 15 de setiembre de 2020

Ejercicio 1



a) A partir del Teo. de Coriolis, la aceleración de la partícula es:

$$\vec a = \underbrace{\vec a'}_{(=0)} + \vec a_T + \vec a_C = -\omega^2 \operatorname{sen}\alpha\, x\, \overbrace{\hat X}^{\operatorname{sen}\alpha\, \hat x - \cos\alpha\, \hat y} + 2\omega \hat Y' \times (-v\hat x)$$

$$\vec a = -\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, x\, \hat x + \omega^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\, x\, \hat y - 2\omega v \operatorname{sen}\alpha\, \hat z$$

A partir de la 2da ley de Newton proyectada según $\hat x$ tenemos:

$$\vec F \cdot \hat x = m\vec a \cdot \hat x \ : \quad -T - mg\cos\alpha = -m\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, x \ :$$

$$\boxed{T = m(\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, x - g\cos\alpha)}$$

; el movimiento de la partícula es el indicado en la medida en que $T \geq 0$:

$$T \geq 0 \iff \omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, x - g\cos\alpha \geq 0 \ : \quad x \geq \boxed{\frac{g\cos\alpha}{\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha} = x_{min}}$$

b) $\mathcal{P}_T = \vec T \cdot \vec v = Tv$: $W_T = \int_{t_2}^{t_1} \mathcal{P}_T\, dt = \int_{t_2}^{t_1} Tv\, dt$;

usando ahora que $\dot x = \frac{dx}{dt} = -v$, consideramos el cambio de variable $dx = -v\,dt$:

$$W_T = -\int_{x_2}^{x_1} T\,dx = \int_{x_1}^{x_2} T\,dx = \int_{x_1}^{x_2} m(\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, x - g\cos\alpha)$$

$$\boxed{W_T = m\left[\frac{1}{2}\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha (x_2^2 - x_1^2) - g\cos\alpha (x_2 - x_1)\right]} \ ;$$

$$\vec N = N_y \hat y + N_z \hat z \ ; \quad \mathcal{P}_N = \vec N \cdot \vec v = \vec N \cdot (\underbrace{\vec v'}_{\parallel \hat x} + \underbrace{\vec v_T}_{\parallel \hat z}) = N_z v_T \ , \quad \vec v_T = \omega x \operatorname{sen}\alpha\, \hat z$$

$$N_z = m\vec a \cdot \hat z = -2m\omega v \operatorname{sen}\alpha \ : \quad \mathcal{P}_N = -2m\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, x v \overset{(\dot x = -v)}{=} 2m\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, x \dot x$$

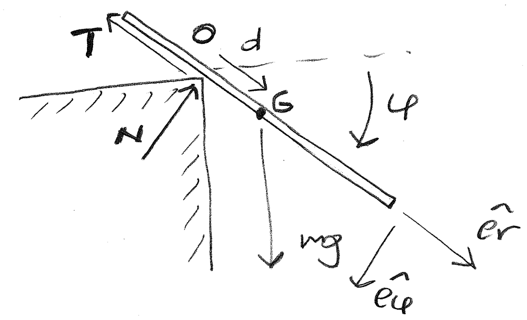
$$\Rightarrow \boxed{W_N = \int_{t_2}^{t_1} \mathcal{P}_N\, dt = \int_{t_2}^{t_1} m\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, \overbrace{2x\dot x}^{\frac{d}{dt}(x^2)}\, dt = m\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha (x_1^2 - x_2^2)}$$

Obs: variación de la energía mec. $\Delta E = \Delta(T + U)$; $T = \frac{1}{2} m(\vec v' + \vec v_T)^2 = \frac{1}{2} m(v^2 + \omega^2 x^2 \operatorname{sen}^2\alpha)$

$U = mg\, x \cos\alpha$

$$; \ \Delta E = \frac{m}{2}\omega^2 \operatorname{sen}^2\alpha (x_1^2 - x_2^2) + mg\cos\alpha (x_1 - x_2) = W_T + W_N$$

Ejercicio 2



a) Para hallar la ecuación de movimiento consideremos la Segunda Cardinal a la barra desde el punto fijo O:

$$I_O \ddot{\varphi} = mgd\cos\varphi,$$

con $d = \frac{l}{2} - \frac{l}{3} = \frac{l}{6}$

$$I_O = I_G + md^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{6}\right)^2 = \frac{ml^2}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{ml^2}{9}\ddot{\varphi} = mg\frac{l}{6}\cos\varphi : \boxed{\ddot{\varphi} = \frac{3}{2}\,{}^{g}/_{l}\cos\varphi}$$

Para hallar el ángulo donde comienza el deslizamiento, comencemos por hallar T y N (la barra no se desliza mientras $|T| \leq f|N|$):

Primera Cardinal: $\hat{e_r}$) $-T + mg\,\text{sen}\varphi = -md\dot{\varphi}^2$

$\hat{e_\varphi}$) $-N + mg\cos\varphi = md\ddot{\varphi} = md\,{}^{3}/_{2}\,{}^{g}/_{l}\cos\varphi = \frac{1}{4}mg\cos\varphi$

Para obtener $\dot{\varphi}^2$ preintegramos la ec. de movimiento.

$$\frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 - \underbrace{\dot{\varphi}_0^2}_{=0}) = \frac{3}{2}\,{}^{g}/_{l}\,(\text{sen}\varphi - \underbrace{\text{sen}\,\varphi(0)}_{=0}) : \quad \dot{\varphi}^2 = 3\,{}^{g}/_{l}\,\text{sen}\varphi \quad \left(\begin{matrix}\text{tiem usando}\\ \text{que } \dot{E} = 0\end{matrix}\right)$$

$\Rightarrow$ susti en la primera cardinal

$$\left\{\begin{matrix}\boxed{T = \frac{3}{2}mg\,\text{sen}\varphi} \\ \boxed{N = \frac{3}{4}mg\cos\varphi}\end{matrix}\right.$$

El no deslizamiento se cumple mientras $\frac{3}{2}\cancel{mg}\,\text{sen}\varphi \leq f\frac{3}{4}mg\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{3}{4}\cancel{mg}\cos\varphi$

$$\text{tg}\varphi \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \leftrightarrow \boxed{\varphi \leq \varphi_d = \frac{\pi}{6}}$$

b) d ahora es variable en el tiempo: $\vec{a_G} = (\ddot{d} - d\dot{\varphi}^2)\hat{e_r} + (2\dot{d}\dot{\varphi} + d\ddot{\varphi})\hat{e_\varphi}$

$\Rightarrow$ Primera Cardinal: $\hat{e_r}$) $-T + mg\,\text{sen}\varphi = m(\ddot{d} - d\dot{\varphi}^2)$ (i), $\quad T = fN$ (iii)

$\hat{e_\varphi}$) $-N + mg\cos\varphi = m(2\dot{d}\dot{\varphi} + d\ddot{\varphi})$ (ii) (hay deslizamiento)

Segunda Cardinal desde G: $dN = I_G\ddot{\varphi} = \frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi}$ (iv)

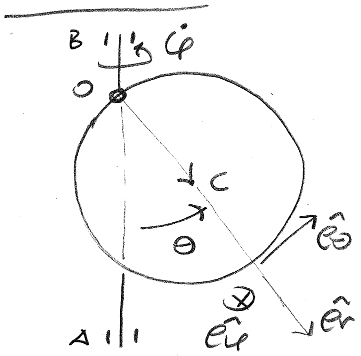
- usando (iii) en (i) y eliminando N entre (i) y (ii):

$$\boxed{m(\ddot{d} - d\dot{\varphi}^2) = mg\,\text{sen}\varphi - f[mg\cos\varphi - m(2\dot{d}\dot{\varphi} + d\ddot{\varphi})]}$$

- eliminando N entre (ii) y (iv):

$$\boxed{d[mg\cos\varphi - m(2\dot{d}\dot{\varphi} + d\ddot{\varphi})] = \frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi}}$$

Ejercicio 3



a) i) se conserva la componente vertical del momento angular del sistema (sistema: disco + eje, el eje no aporta nada al momento angular (o la energía) porque es una distribución lineal de masa girando sobre sí misma):

$$\dot{\vec{L}}_o = \vec{M}_o^{(ext)} \quad (\text{segunda cardinal}, \dot{O}=0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\dot{\vec{L}}_o \cdot \hat{k}}_{\downarrow (\dot{\hat{k}}=0)} = \vec{M}_o^{(ext)} \cdot \hat{k} = \left[\vec{M}_o^{(peso)} + \vec{M}_o^{(art.A)} + \vec{M}_o^{(art.B)}\right] \cdot \hat{k}$$

$$= \vec{M}_o^{(peso)} \cdot \hat{k} = \left((C-O) \times (-mg\hat{k})\right) \cdot \hat{k} = 0$$

(el eje gira libremente $\leftrightarrow$ las art. no ejercen momento en $\hat{k}$)

$$= \frac{d}{dt}\left(\vec{L}_o \cdot \hat{k}\right) = 0 \; : \; \boxed{\vec{L}_o \cdot \hat{k} = cte}$$

ii) se conserva la energía del sistema ya que el contacto en O es liso y el giro del eje libre; veamos que la potencia de las reactivas es nula para probarlo formalmente:

$$\mathcal{P}^{(react)} = \underbrace{\vec{M}_A^{(art.A)} \cdot \underbrace{\vec{\omega}^{\,eje}}_{\dot{\varphi}\hat{k}}}_{\substack{\text{no ejerce momento en } \hat{k} \\ =0}} + \underbrace{\vec{M}_B^{(art.B)} \cdot \underbrace{\vec{\omega}^{(eje)}}_{\dot{\varphi}\hat{k}}}_{=0} + \underbrace{\vec{M}_o^{(art.O)} \cdot \vec{\omega}^{(disco)} - \vec{M}_o^{(art.O)} \cdot \vec{\omega}^{\,eje}}_{\substack{\text{potencia de la articulación: } \vec{M}_o^{(art.O)} \text{ actuando en el disco,} \\ \text{y reacción en el eje}}}$$

Los términos de producto escalar de la resultante con la velocidad son nulos para cada sistema (todas las velocidades son nulas)

$$= \underbrace{\vec{M}_o^{(art.O)}}_{\text{no ejerce momento en } \hat{e}_\varphi} \cdot \left(-\dot{\theta}\hat{e}_\varphi + \cancel{\dot{\varphi}\hat{k}}\right) - \cancel{\vec{M}_o^{(art.O)} \cdot \dot{\varphi}\hat{k}} = 0 \;\checkmark \quad \left(\boxed{E = cte}\right)$$

b) • $\vec{L}_o = \mathbb{I}_o \vec{\omega}^{(disco)}$, $\vec{\omega}^{(disco)} = \dot{\varphi}\hat{k} - \dot{\theta}\hat{e}_\varphi = \dot{\varphi}(-\cos\theta\,\hat{e}_r + \operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\theta) - \dot{\theta}\hat{e}_\varphi$

$$\mathbb{I}_o\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi\} = \begin{pmatrix} I_C/2 & 0 & 0 \\ 0 & I_C/2 + ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_C + ma^2 \end{pmatrix} = \frac{ma^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$I_C = \frac{ma^2}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_o = \frac{ma^2}{4}\left[-\dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{e}_r + 5\dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\theta - 6\dot{\theta}\,\hat{e}_\varphi\right]$$

$$\vec{L}_o \cdot \hat{k} = \frac{ma^2}{4}\dot{\varphi}\left(\cos^2\theta + 5\operatorname{sen}^2\theta\right) = \boxed{\frac{ma^2}{4}\dot{\varphi}\left(1 + 4\operatorname{sen}^2\theta\right) = L_z} \quad (i)$$

• $E = T + U = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_o\vec{\omega} - mga\cos\theta = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L}_o - mga\cos\theta$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\frac{ma^2}{4}\left[\dot{\varphi}^2\left(1 + 4\operatorname{sen}^2\theta\right) + 6\dot{\theta}^2\right] - mga\cos\theta} \quad (ii)$$

Condiciones iniciales: $\dot\varphi(0)=\omega_0 \;,\; \dot\theta(0)=0 \;,\; \theta(0)=\pi/2 \Rightarrow \begin{cases} L_z = 5\,\frac{ma^2}{4}\,\omega_0 \\ E = \frac{1}{2}\,\frac{ma^2}{4}\,5\omega_0^2 \end{cases}$

$$\boxed{\cancel{\frac{ma^2}{4}}\,\dot\varphi\,(1+4\,\mathrm{sen}^2\theta) = \cancel{\frac{ma^2}{4}}\,5\omega_0} \quad \text{i')} \; : \quad \dot\varphi = \frac{5\omega_0}{1+4\,\mathrm{sen}^2\theta}$$

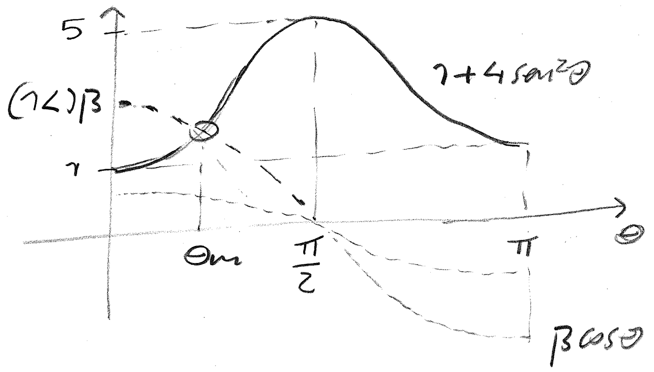
$$\frac{1}{2}\,\frac{ma^2}{4}\,5\omega_0^2 = \frac{1}{2}\,\frac{ma^2}{4}\left[\dot\varphi^2\,(1+4\,\mathrm{sen}^2\theta) + 6\dot\theta^2\right] - mga\cos\theta \qquad \text{ii')}$$

Sustituyendo $\dot\varphi$ en ii') y despejando $\dot\theta^2$:

$$\dot\theta^2 = \left(\frac{4}{3ma^2}\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{ma^2}{\cancel{4}}\right)5\omega_0^2 \underbrace{\left(1 - \frac{5}{1+4\,\mathrm{sen}^2\theta}\right)}_{\frac{4\,\mathrm{sen}^2\theta-4}{1+4\,\mathrm{sen}^2\theta} \,=\, -\frac{\cancel{4}\cos^2\theta}{1+4\,\mathrm{sen}^2\theta}} + mga\cos\theta\right]$$

$$\boxed{\dot\theta^2 = \underbrace{\frac{4}{3ma^2}\left[mga - \frac{5}{2}\,ma^2\omega_0^2\,\frac{\cos\theta}{1+4\,\mathrm{sen}^2\theta}\right]}_{f(\theta)}\cos\theta}$$

Obs: (no pedido en la propuesta) podemos hallar a partir de $f(\theta)$, los valores extremos de θ $(\dot\theta=0) \Leftrightarrow f(\theta)=0$: $\begin{cases} \cos\theta = 0 : \theta = \pi/2 \;\checkmark \\ \frac{\cos\theta_m}{1+4\,\mathrm{sen}^2\theta_m} = \underbrace{\frac{2}{5}\,\frac{(g/a)}{\omega_0^2}}_{\beta^{-1}} \end{cases}$



- si $\beta \geq 1$ $\left(\omega_0^2 \geq \frac{2}{5}\,g/a\right)$, hay un ángulo θ_m (ángulo mínimo)
- en caso contrario, $\dot\theta$ sólo se anula en $\theta = \pi/2$