Ejercicio 1

a) $f(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

órbita circular : $\begin{cases} r = r_0 \ \forall t : \dot{r} = 0, \ddot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = v_c / r_0 \end{cases}$

$\Rightarrow -\frac{K}{r_0^2} - \frac{K'}{r_0^3} = -\frac{m v_c^2}{r_0} \longrightarrow r_0 = K'/K \quad \boxed{v_c^2 = \frac{2K^2}{mK'}}$

b) ($v_0 = \sqrt{2} v_c$)

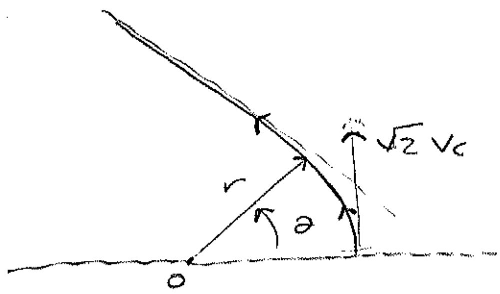
$\frac{F(u)}{\cancel{m}} = a_r = -\frac{\ell^2}{m^2} u^2 (u'' + u)$

$-K\cancel{u^2} - K'u^{\cancel{3}} = -\frac{\ell^2}{m} \cancel{u^2}(u'' + u) \quad : \quad u'' + \left(1 - \frac{mK'}{\ell^2}\right) u = \frac{mK}{\ell^2}$

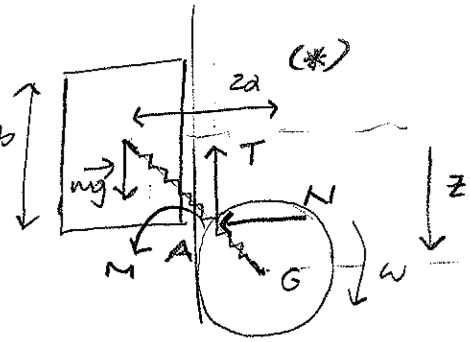
$\ell = m r_0 v_0 \quad : \quad \ell^2 = m^2 r_0^2 v_0^2 = m^2 (K'/K)^2 \, 2 v_c^2 = 4 m K'$

$\Rightarrow u'' + \frac{3}{4} u = K/4K' \quad : \quad u(\theta) = A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta\right) + K/3K'$

$\left.\begin{array}{l} u(0) = 1/r_0 = K/K' \\ u'(0) = 0 \ (\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0) \end{array}\right] \quad \boxed{u(\theta) = \frac{1}{3}\frac{K}{K'}\left(1 + 2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta\right)\right)}$



Ejercicio 2



a) mientras el bloque permanezca en reposo y el disco rueda sin deslizar, la energía del sistema se conserva:

$$E = -mgz + \frac{1}{2}K\left(z^2 + (2a)^2\right) + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$$

$I_G = \frac{1}{2}ma^2$; como el disco rueda sin deslizar: $\dot{z} = a\omega$

$E(t=0) = \frac{1}{2}K(2a)^2$:

$$\boxed{-mgz + \frac{1}{2}Kz^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ma^2\right)\left(\frac{\dot{z}}{a}\right)^2 = 0}$$

b) equilibrio del bloque: $T = mg + Kz$

$N = K(2a)$

$M + amg - bK(2a) + aKz = 0$

condiciones de equilibrio
$$\begin{cases} N \geq 0 \ \checkmark \\ |T| \leq fN \xrightarrow{(z \geq 0)} mg + Kz \leq fK2a \quad (i) \\ M \geq 0 \longrightarrow 2\cancel{a}bK - \cancel{a}(Kz + mg) \geq 0 \quad (ii) \end{cases}$$

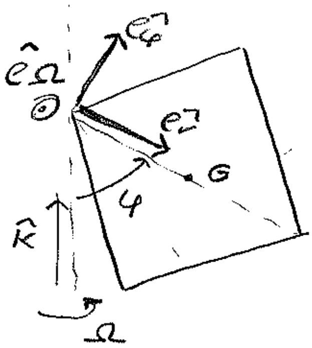
La coordenada z sigue un movimiento armónico simple, cuyo valor máximo se puede obtener imponiendo $\dot{z} = 0$ en la ec. de movimiento de la parte (a):

$$-mgz + \frac{1}{2}Kz^2 = 0: \begin{cases} z = z_{min} = 0 \\ z = z_{max} = 2mg/K \end{cases}$$

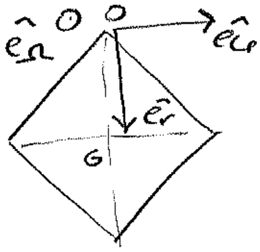
Considerando $z = z_{max}$ en (i) y (ii):
$$\begin{cases} mg + 2mg \leq fK2a : \boxed{f \geq \frac{3mg}{2Ka}} \\ 2bK - (2mg + mg) \geq 0 : \boxed{b \geq \frac{3mg}{2K}} \end{cases}$$

(*) (El sistema de reacciones correspondiente al contacto entre la placa y la pared se puede reducir a una fuerza neta de componentes T y N y un momento reactivo M visto desde el extremo A de la placa)

Ejercicio 3



a) $\vec{L}_O = \mathbb{I}_O \vec{\omega}$, $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\hat{e}_\Omega + \Omega \hat{k}$



$\{\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_\Omega\}$ es base principal para $\mathbb{I}_O$:

$$I_O^{\{\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_\Omega\}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 + I_2 \end{pmatrix}$$

Por otro lado: $$I_G^{\{\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_\Omega\}} = \begin{pmatrix} I_G/2 & 0 & 0 \\ 0 & I_G/2 & 0 \\ 0 & 0 & I_G \end{pmatrix}$$ (visto desde G, los momentos de inercia según $\hat{e}_r$ y $\hat{e}_\varphi$ son iguales)

$$\left(\text{con } I_G = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy \left(\frac{m}{a^2}\right)(x^2+y^2) = \frac{ma^2}{6} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = I_G/2 = ma^2/12 \\ I_2 = I_G/2 + m\left(a/\sqrt{2}\right)^2 = \frac{7}{12} ma^2 \end{cases} \quad \Bigg| \quad I_O^{\{\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_\Omega\}} = \frac{ma^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\hat{e}_\Omega + \Omega(-\cos\varphi\, \hat{e}_r + \operatorname{sen}\varphi\, \hat{e}_\varphi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_O = \mathbb{I}_O \vec{\omega} = \frac{ma^2}{12}\left(-\Omega\cos\varphi\, \hat{e}_r + 7\Omega \operatorname{sen}\varphi\, \hat{e}_\varphi + 8\dot{\varphi}\hat{e}_\Omega\right)}$$

b) $$\underbrace{\vec{M}_O^{(ext)} \cdot \hat{e}_\Omega}_{-mg\frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\varphi} = \dot{\vec{L}}_O \cdot \hat{e}_\Omega = \frac{ma^2}{12} 8\ddot{\varphi} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O \cdot \hat{e}_\Omega$$

$$-mg\frac{a}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\varphi = \frac{2}{3}ma^2\ddot{\varphi} + \frac{ma^2}{12}\Omega^2(-7+1)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} - \frac{3}{4}\Omega^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \frac{3}{2\sqrt{2}}\, g/a\, \operatorname{sen}\varphi = 0}$$