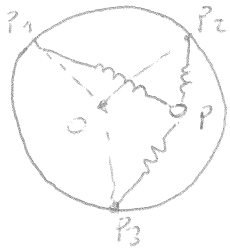
Ejercicio 7



a) $\vec{F} = -K(P-P_1) - K(P-P_2) - K(P-P_3)$

$= -3K(P-O) + K\underbrace{\left[(P_1-O)+(P_2-O)+(P_3-O)\right]}_{=0}$

$= -\underbrace{3K}_{K_{eq}}\vec{r}$

b) $m\vec{a} = -3K\vec{r}$

$m\ddot{x} = -3Kx \longleftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $\omega_0^2 = 3K/m$

$m\ddot{y} = -3Ky \longleftrightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$

$\Rightarrow x(t) = A\cos\omega_0 t + B\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t$

$y(t) = C\cos\omega_0 t + D\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t$

Cond. Iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ $\left(\vec{r_0} = x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath}\right)$

$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ $\left(\vec{v_0} = \dot{x}_0\hat{\imath} + \dot{y}_0\hat{\jmath}\right)$

$$\boxed{\begin{aligned} \Rightarrow x(t) &= x_0\cos\omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\mathrm{sen}\,\omega_0 t \\ y(t) &= y_0\cos\omega_0 t + \frac{\dot{y}_0}{\omega_0}\mathrm{sen}\,\omega_0 t \end{aligned}}$$

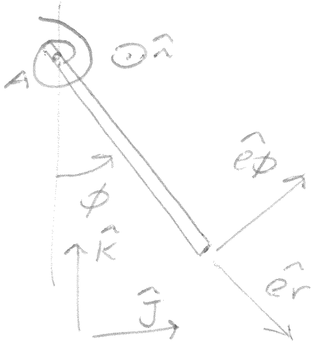
: $\vec{r}(t) = \vec{r_0}\cos\omega_0 t + \frac{\vec{v_0}}{\omega_0}\mathrm{sen}\,\omega_0 t$

c) $\vec{r_0} \perp \vec{v_0}$ y $v_0 = \omega_0 r_0$ aseguran $|\vec{r}| = r_0 \ \forall t$

$\left(\vec{r}\cdot\vec{r} = r_0^2\cos^2\omega_0 t + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}\mathrm{sen}^2\omega_0 t + 2\frac{\vec{r_0}\cdot\vec{v_0}}{\omega_0}\cos\omega_0 t\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t = r_0^2 \ \forall t \right.$

$\left.\Rightarrow \begin{cases} \vec{r_0}\cdot\vec{v_0} = 0 \\ r_0^2 = \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \end{cases} \right)$

Ejercicio 2



a) $\vec{L}_A = \mathbb{I}_A \vec{\omega}$, $\vec{\omega} = \omega\hat{k} + \dot{\phi}\hat{n}$

$$\mathbb{I}_A\{\hat{e}_r, \hat{e}_\phi, \hat{n}\} = I \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo:

$$I = \int_0^{2\ell} \left(\frac{m}{2\ell}\right) x^2 dx = \left(\frac{m}{2\ell}\right) \frac{1}{3}(2\ell)^3 = \frac{4}{3} m\ell^2$$

$$\vec{\omega} = \omega(\text{sen}\phi\, \hat{e}_\phi - \cos\phi\, \hat{e}_r) + \dot{\phi}\hat{n}$$

$$\vec{L}_A = I(\omega\, \text{sen}\phi\, \hat{e}_\phi + \dot{\phi}\hat{n})$$

b) $\dot{\vec{L}}_A = \vec{M}_A^{(ext)}$, $\dot{\vec{L}}_A \cdot \hat{n} = -\mathbb{K}\phi - mgl\,\text{sen}\phi$

$$\dot{\hat{e}}_\phi \cdot \hat{n} = \vec{\omega} \times \hat{e}_\phi \cdot \hat{n} = \omega\hat{k} \times \hat{e}_\phi \cdot \hat{n} = -\omega\hat{\jmath} \cdot \hat{e}_\phi = -\omega\cos\phi$$

$$\Rightarrow I\ddot{\phi} - \omega^2 I\, \text{sen}\phi\cos\phi = -\mathbb{K}\phi - mgl\,\text{sen}\phi$$

$$I\ddot{\phi} + \frac{dU_{ef}}{d\phi} = 0, \quad \frac{dU_{ef}}{d\phi} = \text{sen}\phi(mgl - \omega^2 I\cos\phi) + \mathbb{K}\phi$$

c) $\mathbb{K} = 0$; las posiciones de equilibrio estable corresponden a mínimos de U_{ef}:

$$\frac{dU_{ef}}{d\phi} = 0: \quad \text{sen}\phi\,(mgl - \omega^2 I\cos\phi) = 0: \quad \begin{cases} \phi = 0, \pi \\ \cos\phi = \dfrac{mgl}{\omega^2 I} \quad \text{si } \dfrac{mgl}{\omega^2 I} \leq 1 \end{cases}$$

$$\frac{d^2U_{ef}}{d\phi^2} = \cos\phi(mgl - \omega^2 I\cos\phi) + \omega^2 I \underbrace{\text{sen}^2\phi}_{1-\cos^2\phi} = mgl\cos\phi + \omega^2 I(1 - 2\cos^2\phi)$$

$$\left.\frac{d^2U_{ef}}{d\phi^2}\right|_{\phi=\pi} = -mgl - \omega^2 I < 0 \quad : \phi = \pi \text{ es de equilibrio inestable}$$

$$\left.\frac{d^2U_{ef}}{d\phi^2}\right|_{\phi=0} = mgl - \omega^2 I > 0 \text{ si } \omega^2 < \frac{mgl}{I} \quad : \phi = 0 \text{ estable si } \omega^2 < \frac{mgl}{I}$$

$$\left.\frac{d^2U_{ef}}{d\phi^2}\right|_{\cos\phi = mgl/\omega^2 I} = \frac{(mgl)^2}{\omega^2 I} + \omega^2 I\left(1 - 2\left(\frac{mgl}{\omega^2 I}\right)^2\right) = \omega^2 I\left(1 - \left(\frac{mgl}{\omega^2 I}\right)^2\right)$$

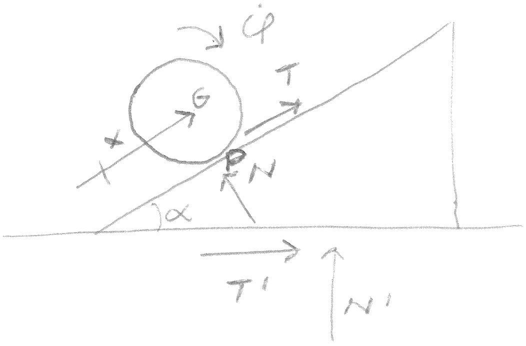
> 0 si $\dfrac{mgl}{\omega^2 I} < 1$: la posición de equilibrio es estable mientras exista

Para el caso $\frac{mgl}{\omega^2 I} = 1$ el criterio anterior no define la estabilidad ;

$$\frac{dU_{ef}}{d\phi} = \omega^2 I \operatorname{sen}\phi\,(1-\cos\phi) \quad \text{que cumple:} \left[\begin{array}{ll} >0 & \text{para } \phi \to 0^+ \\ <0 & \text{para } \phi \to 0^- \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \frac{dU_{ef}}{d\phi}$ es creciente alrededor de $\phi = 0$, por lo que esta posición de equilibrio es un mínimo de U_{ef} y por lo tanto, es de equilibrio estable.

Ejercicio 3



a) Suponiendo la cuña en equilibrio:

$$T' - T\cos\alpha + N\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0$$

$$N' - T\,\mathrm{sen}\,\alpha - N\cos\alpha - Mg = 0$$

La 1ª Cardinal al disco en la dirección normal a la cuña:

$$N - mg\cos\alpha = 0$$

Como el disco desliza: $T = fN = fmg\cos\alpha$

Para que la cuña no deslice: $|T'| \le f'N'$

$$\boxed{|f\cos^2\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha| \le f'(f\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha + M/m)}$$

b) 1ª C al disco según el plano inclinado: $T - mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = m\ddot{x}$

2ª C al disco: $-RT = I_G\ddot\varphi = \frac{1}{2}mR^2\ddot\varphi$

$T = fN$: $\boxed{\ddot{x} = g(f\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha)}$; si $\boxed{f > \mathrm{tg}\,\alpha}$, $\ddot{x} > 0$ y el disco sube

$\boxed{\ddot\varphi = -2\frac{g}{R}f\cos\alpha}$

c) El disco comienza a deslizar cuando $\vec{v}_P = 0$: $\dot{x}(t^*) - R\dot\varphi(t^*) = 0$:

(integramos las ecs. de mov.) $g(f\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha)t^* - (\omega_0 R - 2gf\cos\alpha\, t^*) = 0$

$$\boxed{t^* = \frac{\omega_0 R}{g(3f\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha)}}$$

d) Para $t > t^*$ se conserva la energía: $mgh + \frac{1}{2}I_P\dot\varphi^2 = mgh(t^*) + \frac{1}{2}I_P\dot\varphi^2(t^*)$

$$= mg\,\mathrm{sen}\,\alpha\, x(t^*) + \frac{1}{2}I_P\dot\varphi^2(t^*)$$

$$I_P = I_G + mR^2$$

Cuando el disco se detiene tenemos: $mgh_{max} = mg\,\mathrm{sen}\,\alpha\, x(t^*) + \frac{1}{2}\frac{3}{2}mR^2\dot\varphi^2(t^*)$

$$h_{máx} = \mathrm{sen}\,\alpha\,\frac{1}{2}g(f\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha)t^{*2} + \frac{3}{4}\frac{R^2}{g}\left(\omega_0 - \frac{2g}{R}f\cos\alpha\, t^*\right)^2$$

$$= \left[\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,\alpha\, g(f\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha) + \frac{3}{4}g(f\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha)^2\right]t^{*2}$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}\left[\mathrm{sen}\,\alpha(f\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha) + \frac{3}{2}(f\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha)^2\right]\frac{\omega_0^2R^2}{g(3f\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha)^2}}$$