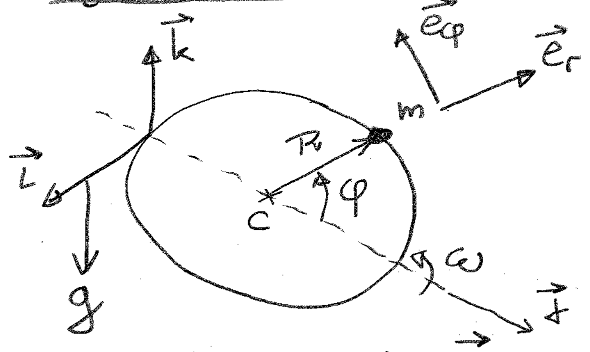
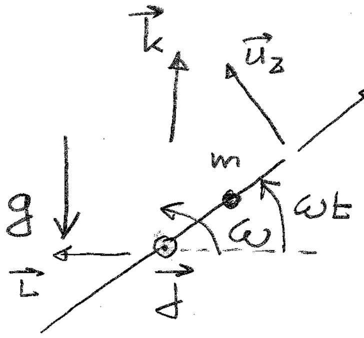
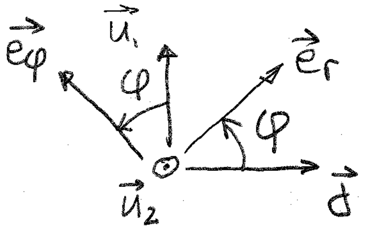
Ejercicio Nº1:





parte a: $m\vec a = \vec F = -mg\vec k + \underset{N_1\vec e_r + N_2\vec u_2}{\vec R}$

$m\vec a\cdot\vec e_\varphi = -mg\vec k\cdot\vec e_\varphi$



$\vec e_\varphi = -\operatorname{sen}\varphi\,\vec j + \cos\varphi\,\vec u_1$

$\vec u_1 = -\cos\omega t\,\vec i + \operatorname{sen}\omega t\,\vec k$

$\vec k\cdot\vec e_\varphi = \cos\varphi\,\vec u_1\cdot\vec k = \cos\varphi\operatorname{sen}\omega t$

Cálculo de la aceleración derivando directamente:

$\vec r = R\vec e_r$ $\qquad \vec e_r = \cos\varphi\,\vec j + \operatorname{sen}\varphi\,\vec u_1$

$\vec v = \dot{\vec r} = R\dot{\vec e}_r$ $\qquad \dot{\vec e}_r = \underbrace{-\operatorname{sen}\varphi\,\dot\varphi\,\vec j + \cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec u_1}_{\dot\varphi\vec e_\varphi} + \operatorname{sen}\varphi\,\underset{\omega\vec u_2}{\dot{\vec u}_1}$

$\vec v = R(\dot\varphi\,\vec e_\varphi + \omega\operatorname{sen}\varphi\,\vec u_2)$

$\vec a = R(\ddot\varphi\,\vec e_\varphi + \dot\varphi\,\dot{\vec e}_\varphi + \omega\cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec u_2 + \omega\operatorname{sen}\varphi\,\underset{-\omega\vec u_1}{\dot{\vec u}_2})$

$\dot{\vec e}_\varphi = \underbrace{-\cos\varphi\,\dot\varphi\,\vec j - \operatorname{sen}\varphi\,\dot\varphi\,\vec u_1}_{-\dot\varphi\vec e_r} + \cos\varphi\,\dot{\vec u}_1 = -\dot\varphi\,\vec e_r + \omega\cos\varphi\,\vec u_2$

$\vec a = R\ddot\varphi\,\vec e_\varphi - R\dot\varphi^2\,\vec e_r + 2R\dot\varphi\,\omega\cos\varphi\,\vec u_2 - R\omega^2\operatorname{sen}\varphi\,\vec u_1$

Cálculo de la aceleración por Coriolis:

$\vec a = \vec a_R + \vec a_T + \vec a_C$

↳ Mov. circular $\vec a_R = R\ddot\varphi\,\vec e_\varphi - R\dot\varphi^2\,\vec e_r$

$\vec a_T = \underset{0}{\vec a_O} + \underset{0}{\dot{\vec\omega}}\wedge\vec r + \vec\omega\wedge[\vec\omega\wedge\vec r] = \omega\vec j\wedge(\omega\vec j\wedge R\vec e_r)$

$\vec j\wedge\vec e_r = \operatorname{sen}\varphi\,\vec j\wedge\vec u_1 = \operatorname{sen}\varphi\,\vec u_2 \Rightarrow \vec a_T = R\omega^2\operatorname{sen}\varphi\,\underbrace{\vec j\wedge\vec u_2}_{-\vec u_1}$

$\vec a_C = 2\vec\omega\wedge\vec v_R = 2\omega\vec j\wedge(R\dot\varphi\,\vec e_\varphi) = 2R\omega\dot\varphi\cos\varphi\,\underbrace{\vec j\wedge\vec u_1}_{\vec u_2}$

$$\vec{a}\cdot\vec{e}_\varphi = R\ddot{\varphi} - R\omega^2 \operatorname{sen}\varphi \underbrace{\vec{u}_1\cdot\vec{e}_\varphi}_{\cos\varphi}$$

$$\Rightarrow \cancel{m}R\ddot{\varphi} - \cancel{m}R\omega^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = -\cancel{m}g\cos\varphi \operatorname{sen}\omega t$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} = \cos\varphi\left(\omega^2 \operatorname{sen}\varphi - \frac{g}{R}\operatorname{sen}\omega t\right)}$$

Observar que si $\cos\varphi = 0$ la partícula permanecerá en equilibrio relativo $\Rightarrow$ $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ son posiciones de eq. relativo

(las 2 posiciones superior e inferior en que el peso es perpendicular a la guía en todo instante)

parte b: $\dot{\varphi} = \Omega$ cte $\Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$

$$\varphi(t) = \Omega t + \varphi(0) \Rightarrow \omega^2 \operatorname{sen}\varphi(t) = \frac{g}{R}\operatorname{sen}\omega t$$

$\Rightarrow$ por un lado debe ser $\Omega t + \varphi(0) = \omega t \Rightarrow \Omega = \omega$, $\varphi(0) = 0$

Por otro lado: $\boxed{\omega = \pm\sqrt{\frac{g}{R}}}$

Si $\omega > 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$

Con esta condición y la partícula inicialmente en el eje horizontal la partícula podrá moverse con la misma velocidad angular que el aro.

parte c: $N_2 \geq 0$ para que no haya desprendimiento

$$\left.\begin{aligned} m\vec{a}\cdot\vec{u}_2 &= -mg\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{u}_2}_{\cos\omega t} + N_2 \\ \vec{a}\cdot\vec{u}_2 &= 2R\dot{\varphi}\omega\cos\varphi \end{aligned}\right\} N_2 = 2mR\dot{\varphi}\omega\cos\varphi + mg\cos\omega t$$

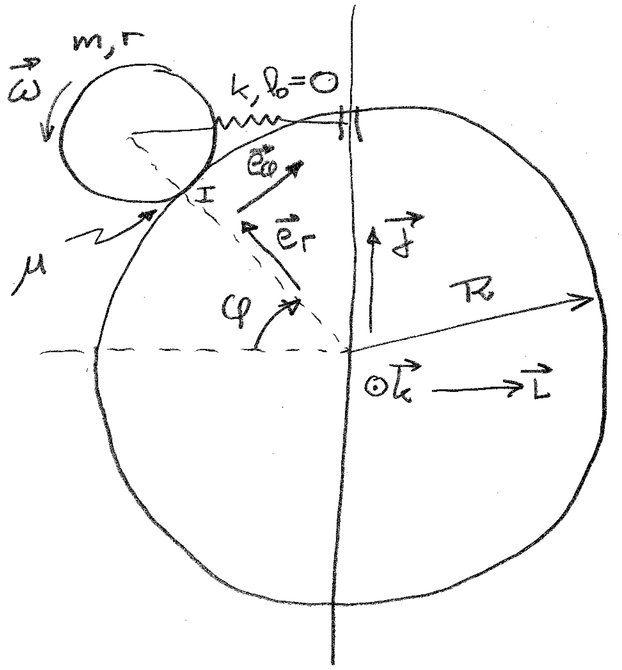
$$\varphi(t) = \omega t \Rightarrow N_2 = 2mR\omega^2\cos\omega t + mg\cos\omega t =$$
$$= \underbrace{(2mR\omega^2 + mg)}_{3mg>0}\cos\omega t$$

$$N_2 \geq 0 \Leftrightarrow \cos\omega t \geq 0 \Rightarrow \varphi(t) = \omega t \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \leq \frac{\pi}{2\omega}$$

La partícula se desprenderá en $\boxed{t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}}$

Ejercicio Nº 2

Mecánica Newtoniana (1122)
Examen 20/2/2020



parte a:

Mientras rueda sin deslizar se verifica el teorema de la energía:

$$T + \underbrace{U}_{} = E$$

$$U = \frac{k\ell^2}{2} = \frac{k(R+r)^2\cos^2\varphi}{2}$$

$$T = \frac{m\vec{v}_G^2}{2} + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathbb{I}_G\vec{\omega}$$

$$\vec{v}_G = (R+r)\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

$$\vec{v}_I = \vec{v}_G + \vec{\omega}\wedge\underbrace{(I-G)}_{-r\vec{e}_r} = 0$$

$$(R+r)\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - r\omega\underbrace{\vec{k}\wedge\vec{e}_r}_{-\vec{e}_\varphi} = 0 \Rightarrow \omega = -\frac{R+r}{r}\dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow T = \frac{m(R+r)^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{(R+r)^2}{2\cancel{r^2}}\dot{\varphi}^2\frac{m\cancel{r^2}}{2} = \frac{3}{4}m(R+r)^2\dot{\varphi}^2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}m(R+r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{k(R+r)^2\cos^2\varphi}{2} = E$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}m\cancel{(R+r)^2}\cancel{\dot{\varphi}}\ddot{\varphi} - k\cancel{(R+r)^2}\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\cancel{\dot{\varphi}} = 0$$

$$\boxed{\frac{3m\ddot{\varphi}}{2} = k\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi}$$

Por cardinales: $\dot{\vec{L}}_I = m\vec{v}_G\wedge\dot{I} + \vec{M}_I^{(ext)}$

$$\vec{M}_I^{(ext)} = \underbrace{(\vec{r}_G - \vec{r}_I)}_{r\vec{e}_r}\wedge k\ell\vec{L}, \qquad \ell = (R+r)\cos\varphi$$

$$\dot{I} = R\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \Rightarrow \vec{v}_G\wedge\dot{I} = 0$$

$$\dot{\vec{L}}_I = kr(R+r)\cos\varphi\;\vec{e}_r\wedge\vec{L} = -kr(R+r)\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{k}$$

$$\vec{e}_r = -\cos\varphi\,\vec{L} + \mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{J}$$

$$\vec{L}_I = M(\vec{r}_G - \vec{r}_I)\wedge\underbrace{\vec{v}_I}_{0} + \mathbb{I}_I\vec{\omega} = \frac{3mr^2}{2}\left(-\frac{R+r}{r}\dot{\varphi}\right)\vec{k}$$

$$-\frac{3m\cancel{r}}{2}\cancel{(R+r)}\ddot{\varphi} = -k\cancel{r}\cancel{(R+r)}\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{3m\ddot{\varphi}}{2} = k\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi}\ \checkmark$$

parte b: $m\vec{a}_G = \vec{R}^{(ext)} = T\vec{e}_\varphi + N\vec{e}_r + kl\vec{L}$

$$\overset{\shortparallel}{(R+r)\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - (R+r)\dot{\varphi}^2\vec{e}_r}$$

$$m(R+r)\ddot{\varphi} = T + k(R+r)\cos\varphi\,\underbrace{\vec{L}\cdot\vec{e}_\varphi}_{\mathrm{sen}\,\varphi}$$

$$\overset{\shortparallel}{\frac{2k\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi}{3m}} \quad \Rightarrow T = -\frac{k(R+r)}{3}\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$-m(R+r)\dot{\varphi}^2 = N + k(R+r)\cos\varphi\,\underbrace{\vec{L}\cdot\vec{e}_r}_{-\cos\varphi}$$

$$\Rightarrow N = k(R+r)\cos^2\varphi - m(R+r)\dot{\varphi}^2$$

Preintegrando o del teorema de la energía:

$$\frac{3m}{4}\dot{\varphi}^2 = \frac{k\,\mathrm{sen}^2\varphi}{2} \qquad \begin{array}{l}\dot{\varphi}(0)=0\\ \varphi(0)=0\end{array}$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2k}{3m}\mathrm{sen}^2\varphi$$

$$N = k(R+r)\left[\cos^2\varphi - \frac{2}{3}\mathrm{sen}^2\varphi\right] = \frac{k(R+r)}{3}(5\cos^2\varphi - 2)$$

$|T| \leq \mu|N| \rightarrow$ se verifica en $\varphi = 0$

Se rompe cuando $\frac{\cancel{k(R+r)}}{\cancel{3}}\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi = \mu\frac{\cancel{k(R+r)}}{\cancel{3}}(5\cos^2\varphi - 2)$

Quiero sea en $\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \mu\left(\frac{5}{2} - 2\right) \Rightarrow \boxed{\mu = 1}$

parte c: Ya no vale la rodadura $\Rightarrow$ segunda cardinal en I se complica. Mejor segunda en G

$$\mathbb{I}_G\dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_G^{(ext)} = Tr$$

$$\overset{\shortparallel}{\frac{mr^2}{2}\dot{\omega}\vec{k}} \qquad \text{Hay deslizamiento} \Rightarrow T = -\mu N$$

Observar $T<0$ y $N>0$ en instante de deslizamiento

Las primeras cardinales siguen valiendo en su forma:

$$m(R+r)\ddot{\varphi} = T + k(R+r)\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi$$

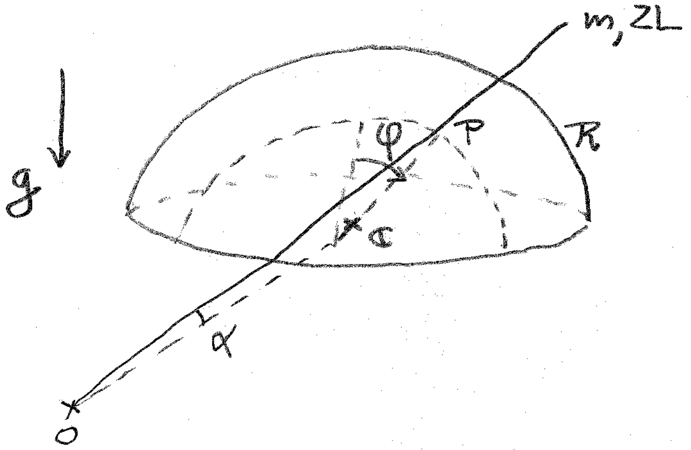
$$N = k(R+r)\cos^2\varphi - m(R+r)\dot{\varphi}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \dfrac{mr\dot{\omega}}{2} = -\mu k(R+r)\cos^2\varphi + \mu m(R+r)\dot{\varphi}^2 \\ m\cancel{(R+r)}\ddot{\varphi} = -\mu k\cancel{(R+r)}\cos^2\varphi + \mu m\cancel{(R+r)}\dot{\varphi}^2 + k\cancel{(R+r)}\cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\varphi \end{array}}$$

$$\Rightarrow m\ddot{\varphi} = -\mu k\cos^2\varphi + \mu m\dot{\varphi}^2 + k\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi$$

Ejercicio Nº 3:

Mecánica Newtoniana (1122)
Examen 20/2/2020

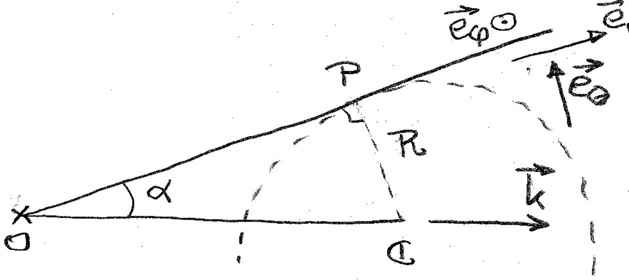


$\vec{v}_O = 0$

parte a: $\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^{(ext)} = \vec{M}_O^{(peso)} + \vec{M}_O^{(\vec{N})}$

Normal del contacto liso entre la barra y la semiesfera

La distancia entre el punto de contacto P y O es constante



$\frac{R}{OC} = \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow OC = \frac{R}{\operatorname{sen}\alpha}$

$\frac{R}{OP} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow OP = \frac{R}{\operatorname{tg}\alpha}$

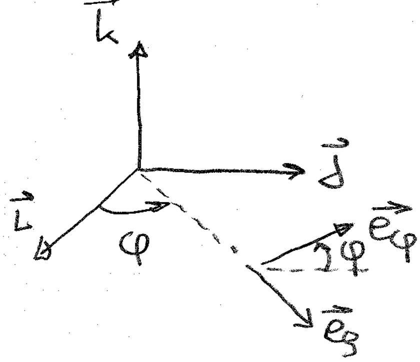
$OP < 2L \Rightarrow R < 2L\operatorname{tg}\alpha$ o $\operatorname{tg}\alpha > \frac{R}{2L}$

Para determinar el movimiento de la barra usamos coordenadas esféricas para ubicar la posición del punto de contacto P sobre la esfera, con origen de coordenadas en O. La dirección $\vec{k}$ es según C-O, $\vec{e}_r$ es paralelo a la barra, $\vec{e}_\varphi$ es perpendicular al plano OPC y $\vec{e}_\theta$ es perpendicular a $\vec{e}_r$ en ese plano.

$\theta = \alpha$

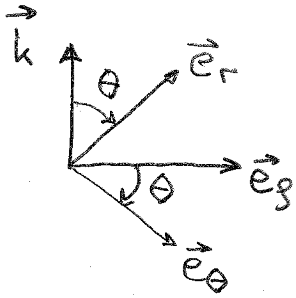
$r = |OP|$

φ es el ángulo entre el plano OPC y este plano en la posición superior de la barra ($\varphi = 0$ en la posición más elevada



$$\vec{M}_O^{(peso)} = \underbrace{(\vec{r}_G - \vec{r}_O)}_{L\vec{e}_r} \wedge mg\,\underbrace{\vec{e}_\varphi(\varphi = \tfrac{\pi}{2})}_{-\vec{i}}$$

$$\vec{M}_O^{(peso)} = -mgL\,\vec{e}_r \wedge \vec{i}$$



$$\vec{L} = \cos\varphi\, \underbrace{\vec{e}_\rho}_{\operatorname{sen}\theta\, \vec{e}_r + \cos\theta\, \vec{e}_\theta} - \operatorname{sen}\varphi\, \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{L} = \cos\varphi \operatorname{sen}\theta\, \vec{e}_r + \cos\varphi\cos\theta\, \vec{e}_\theta - \operatorname{sen}\varphi\, \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{M}_O^{(peso)} = -mgL\Big(\cos\varphi\cos\theta\, \underbrace{\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta}_{\vec{e}_\varphi} - \operatorname{sen}\varphi\, \underbrace{\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\varphi}_{-\vec{e}_\theta}\Big)$$

$$\vec{M}_O^{(peso)} = -mgL\left(\cos\varphi\cos\alpha\, \vec{e}_\varphi + \operatorname{sen}\varphi\, \vec{e}_\theta\right)$$

$$\vec{M}_O^{(\vec{N})} = (\vec{r}_P - \vec{r}_O) \wedge N\vec{e}_\theta = \frac{R}{\operatorname{tg}\alpha}\, \vec{e}_r \wedge N\vec{e}_\theta = \frac{R}{\operatorname{tg}\alpha} N \vec{e}_\varphi$$

$\vec{L}_O = \mathbb{I}_O \vec{\omega}$ $\quad$ $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$ porque $\theta = \alpha$ constante y la base de coordenadas esféricas es solidaria a la barra

$$\vec{k} = \cos\theta\, \vec{e}_r - \operatorname{sen}\theta\, \vec{e}_\theta$$

$$\vec{L}_O = \dot{\varphi}\cos\theta\, \underbrace{\mathbb{I}_O \vec{e}_r}_{0} - \dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\, \underbrace{\mathbb{I}_O \vec{e}_\theta}_{I_{O\vec{e}_\theta}\, \vec{e}_\theta}$$

$$\vec{L}_O = -\dot{\varphi}\operatorname{sen}\alpha\, \frac{4mL^2}{3}\vec{e}_\theta \qquad \frac{m}{12}(2L)^2 + mL^2 = \frac{mL^2}{3} + mL^2 = \frac{4mL^2}{3}$$

$$\dot{\vec{L}}_O = -\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\alpha\, \frac{4mL^2}{3}\vec{e}_\theta - \dot{\varphi}\operatorname{sen}\alpha\, \frac{4mL^2}{3}\dot{\vec{e}}_\theta$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\, \vec{e}_\rho - \operatorname{sen}\theta\, \vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{e}}_\theta = \cos\theta\, \dot{\vec{e}}_\rho = \cos\theta\, \dot{\varphi}\, \vec{e}_\varphi$$

Otra forma: $\dot{\vec{e}}_\theta = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_\theta = \dot{\varphi}\, \vec{k} \wedge \vec{e}_\theta = \dot{\varphi}\cos\theta\, \underbrace{\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho}_{\vec{e}_\varphi}$

$$\dot{\vec{L}}_O = -\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\alpha\, \frac{4mL^2}{3}\vec{e}_\theta - \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, \frac{4mL^2}{3}\vec{e}_\varphi$$

Igualo componentes según $\vec{e}_\theta$: $-\ddot{\varphi}\operatorname{sen}\alpha\, \frac{4\cancel{m}L^{\cancel{2}}}{3} = -\cancel{m}g\cancel{L}\operatorname{sen}\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} = \frac{3g\operatorname{sen}\varphi}{4L\operatorname{sen}\alpha}}$$

Otra forma: teorema de la energía $T + U = E$

$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathbb{I}_O\vec{\omega} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}_O = \frac{1}{2}\Big(-\dot{\varphi}^2\operatorname{sen}\alpha\, \frac{4mL^2}{3}\, \overbrace{\vec{e}_\theta\cdot\vec{k}}^{-\operatorname{sen}\alpha}\Big)$$

$$T = \frac{2mL^2}{3} \operatorname{sen}^2\alpha\,\dot\varphi^2$$

$$U = mg\,x_G = mgL \operatorname{sen}\theta\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{2mL^2}{3}\operatorname{sen}^2\alpha\,\dot\varphi^2 + mgL\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi = E$$

$$\frac{4\cancel{m}L^{\cancel{2}}}{3}\operatorname{sen}^{\cancel{2}}\alpha\,\cancel{\dot\varphi}\ddot\varphi - \cancel{m}g\cancel{L}\,\cancel{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\varphi\,\cancel{\dot\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot\varphi = \frac{3g\operatorname{sen}\varphi}{4L\operatorname{sen}\alpha}}\ \checkmark$$

parte b: $\varphi(0)=0,\ \dot\varphi(0)=0$

Proyecto segunda cardinal según $\vec{e}_\varphi$:

$$-\dot\varphi^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,\frac{4mL^2}{3} = -mgL\cos\varphi\cos\alpha + \frac{R_N}{tg\alpha}$$

Preintegro o evalúo teorema de la energía:

$$\frac{2\cancel{m}L^{\cancel{2}}}{3}\operatorname{sen}^{\cancel{2}}\alpha\,\dot\varphi^2 + \cancel{m}g\cancel{L}\,\cancel{\operatorname{sen}}\alpha\cos\varphi = \cancel{m}g\cancel{L}\,\cancel{\operatorname{sen}}\alpha$$

$$\dot\varphi^2 = \frac{3g\,(1-\cos\varphi)}{2L\operatorname{sen}\alpha}$$

para que no haya desprendimiento

$$\frac{R_N}{tg\alpha} = -\frac{\cancel{3}g(1-\cos\varphi)}{\cancel{2}\cancel{L}\,\cancel{\operatorname{sen}\alpha}}\cancel{\operatorname{sen}\alpha}\cos\alpha\,\frac{\overset{2}{\cancel{4}}mL^2}{\cancel{3}} + mgL\cos\varphi\cos\alpha \geq 0$$

$$-2\cancel{g}\,\cancel{\cos\alpha}\,\cancel{m}\cancel{L} + 3\cancel{mg}\cancel{L}\,\cancel{\cos\alpha}\cos\varphi \geq 0$$

$$\cos\varphi \geq \frac{2}{3} \Rightarrow \text{desprende para } \boxed{\cos\varphi = \frac{2}{3}}$$