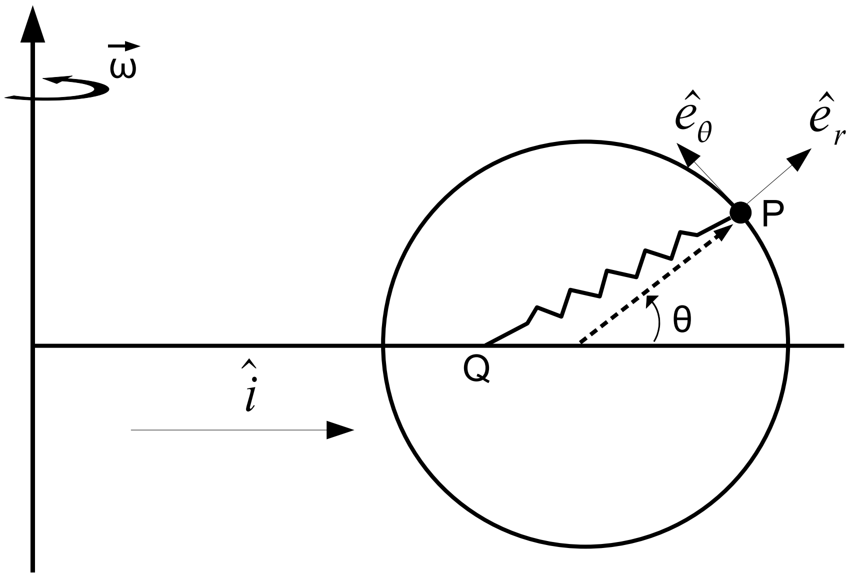
Solución Primer Parcial 10 de mayo de 2008

Mecánica Newtoniana

Ejercicio 1



1. Ninguna fuerza reactiva que actúa sobre la partícula tiene componente según $\hat{e_\theta}$. Considerando la segunda ley de Newton en esa dirección tenemos:

$$-k(P-Q).\hat{e_\theta} = -k\left(\frac{R}{2}\hat{i} + R\hat{e_r}\right).\hat{e_\theta} = k\frac{R}{2}sen\theta = m\vec{a}.\hat{e_\theta}$$

La aceleración la calculamos apelando al teorema de Coriolis y usando como sistema relativo uno solidario a la guía con origen en el centro de ella. La aceleración relativa según la dirección $\hat{e_\theta}$ es $R\ddot{\theta}$ mientras que la aceleración de Coriolis no tiene componente según esa dirección. La aceleración de transporte ($\vec{a}_T$) es la de un movimiento circular uniforme alrededor del eje de giro y a una distancia $(3 + cos\theta)R$ del mismo:

$$\vec{a}_T = -\omega^2 R(3 + cos\theta)\hat{i}$$

por lo que tenemos:

$$k\frac{R}{2}sen\theta = m(R\ddot{\theta} + \omega^2 R(3 + cos\theta)sen\theta) \Leftrightarrow$$
$$\ddot{\theta} + sen\theta\left[\omega^2(3 + cos\theta) - \omega_0^2\right] = 0$$

siendo $\omega_0^2 = \dfrac{k}{2m}$

2. Las posiciones de equilibrio relativo corresponden a $\ddot{\theta} = 0$:

$$\begin{cases} sen\theta_{eq} = 0 : \quad \theta_{eq} = 0, \pi \\ cos\theta_{eq} = \left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 3 \end{cases}$$

3. Las posiciones de equilibrio que verifican $cos\theta_{eq} = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 3$ existen mientras

$$\left|\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 3\right| \leq 1 \Leftrightarrow$$
$$2 \leq \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \leq 4$$

La estabilidad de las posiciones de equilibrio la podemos hallar estudiando la concavidad de los extremos relativos del *"potencial"* U' , cuya derivada primera es

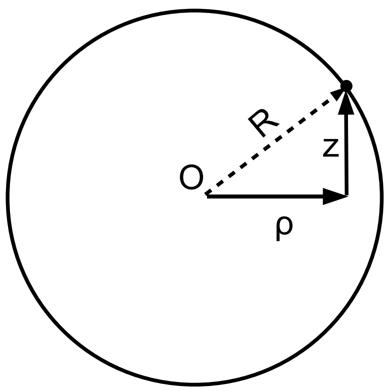
$$\frac{dU'}{d\theta} = sen\theta\left[\omega^2(3 + cos\theta) - \omega_0^2\right]$$

y su derivada segunda

$$\frac{d^2U'}{d\theta^2} = cos\theta\left[\omega^2(3 + cos\theta) - \omega_0^2\right] - \omega^2 sen^2\theta = cos\theta\left[\omega^2(3 + cos\theta) - \omega_0^2\right] - \omega_0^2\left[1 - cos^2\theta\right]$$

$$\left.\frac{d^2U'}{d\theta^2}\right|_{\theta_{eq}} = \begin{cases} 4\omega^2 - \omega_0^2 \quad , & \theta_{eq} = 0, \quad \text{estable para} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 < 4 \\ -\left[2\omega^2 - \omega_0^2\right] \quad , & \theta_{eq} = \pi, \quad \text{estable para} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 > 2 \\ -\omega_0^2\left[1 - cos^2\theta_{eq}\right] \quad , & cos\theta_{eq} = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 3, \quad \text{siempre inestables} \end{cases}$$

Ejercicio 2



1. Dado que la componente vertical del momento de las fuerzas con respecto a O es nula, tenemos:

$$\vec{M}_O.\hat{z} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt}.\hat{z} = 0 \Leftrightarrow L_z = cte.$$

Además la energía (E) se conserva ya que sobre la partícula no trabajan fuerzas no conservativas.

2. Escribiendo L_z y E en coordenadas cilíndricas:

$$L_z = m\rho^2\dot{\varphi}$$
$$E = mgz + \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right)$$

Eliminando $\dot{\varphi}$ entre las dos ecuaciones y usando:

$$\rho^2 + z^2 = R^2$$

además de la derivada de esta relación:

$$\rho\dot{\rho} + z\dot{z} = 0$$

tenemos que:

$$E = mgz + \frac{mz^2\dot{z}^2}{2\left(R^2 - z^2\right)} + \frac{L_z^2}{2m\left(R^2 - z^2\right)} + \frac{m\dot{z}^2}{2} \Leftrightarrow$$
$$\dot{z}^2 = \frac{2\left(R^2 - z^2\right)}{mR^2}\left[E - mgz - \frac{L_z^2}{2m\left(R^2 - z^2\right)}\right] = f(z)$$

3. Una trayectoria con z constante corresponde a $\ddot{z} = 0$, es decir, $\frac{df}{dz} = 0$:

$$2z\left[E - mgz - \frac{L_z^2}{2m\left(R^2 - z^2\right)}\right] + \left(R^2 - z^2\right)\left[mg + \frac{zL_z^2}{m\left(R^2 - z^2\right)^2}\right] = 0$$

usando que para esta trayectoria $E = mgz + \dfrac{L_z^2}{2m\left(R^2 - z^2\right)}$, tenemos:

$$mg + \frac{zL_z^2}{m\left(R^2 - z^2\right)^2} = 0$$

usando que $z = -\frac{R}{2}$ y considerando $L_z = m\rho_0 v_0 = m\sqrt{\frac{3}{4}}Rv_0$, la velocidad pedida resulta:

$$v_0 = \sqrt{\frac{3gR}{2}}$$