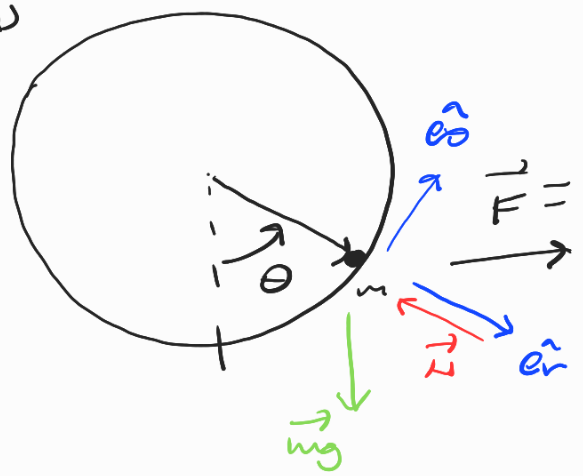
Mecánica Newtoniana, examen 27/12/23

Ej 1) a)



$$\vec{F} = m\gamma x \hat{\imath} = -\nabla U_F,$$

$$U_F = -\frac{1}{2} m\gamma x^2$$

Dado que $\vec{N}$ es de potencia nula, la energía de la partícula se conserva!

$$E = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 + U_g + U_F;\quad \vec{v} = R\dot{\theta}\hat{e_\theta},\quad U_g = -mgR\cos\theta$$

$$U_F = -\frac{1}{2} m\gamma (R\sin\theta)^2$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta - \frac{1}{2} m\gamma R^2 \sin^2\theta}$$

b) $\theta(0) = 0$ | $E(0) = \frac{1}{2} m v_0^2 - mgR$:

$\vec{v}(0) = v_0 \hat{e_\theta}$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - mgR = \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta - \frac{1}{2} m\underbrace{\gamma R}_{gR} R\sin^2\theta :$$

$$\frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2 = \frac{m}{2}\boxed{\left[v_0^2 - 2gR\left(1 - \cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\right] \geq 0} \quad (I)$$

$\forall \theta \in [0, \pi]$

de manera que la partícula llegue a B sin detenerse antes

$$\Rightarrow v_0^2 \geq \max\left\{2gR\left(1 - \cos\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\right\} : v_0^2 \geq 4gR$$

Adicionalmente, no debe perder contacto! $N \geq 0 \quad \forall \theta \in [0, \pi]$

2^{da} ley de Newton según $\hat{e_r}$:

$$-mR\dot{\theta}^2 = -N + mg\cos\theta + \underbrace{F\sin\theta}_{mg\sin\theta}$$

$mg\sin\theta$ (usando que $\gamma R = g$)

$$N = mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta + mg\,\mathrm{sen}^2\theta$$

$$= m\frac{v_0^2}{R} - 2mg\left(1 - \cos\theta - \frac{1}{2}\mathrm{sen}^2\theta\right) + mg\cos\theta + mg\,\mathrm{sen}^2\theta$$

$$= \frac{m}{R}\boxed{\left[v_0^2 - 2gR\left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta + \mathrm{sen}^2\theta\right)\right] \geq 0} \quad (\mathrm{II})$$

$\forall \theta \in [0, \pi]$

$$v_0^2 \geq \max\left\{2gR\left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta + \mathrm{sen}^2\theta\right)\right\} : \boxed{v_0^2 \geq 5gR}$$

condición para cumplir

(I) y (II) a la vez

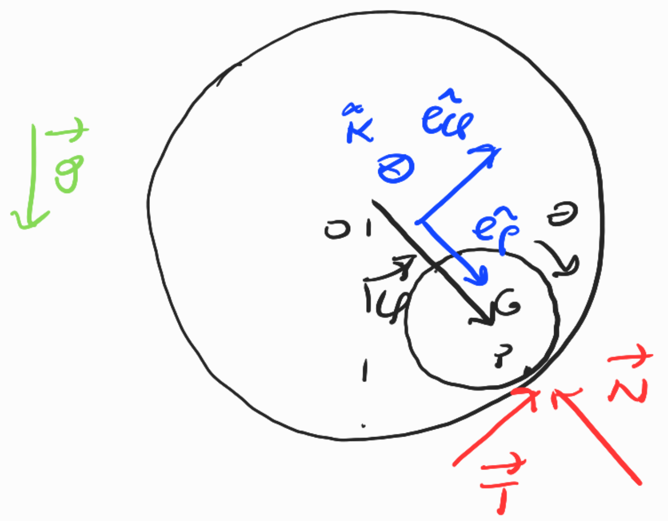
c) $\dot{\theta}^2 = \left(\frac{v_0}{R}\right)^2 - 2g/R\left(1 - \cos\theta - \frac{1}{2}\mathrm{sen}^2\theta\right)$:

$$\underbrace{\dot{\theta}}_{\frac{d\theta}{dt}} = +\sqrt{\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 - 2g/R\left(1 - \cos\theta - \frac{1}{2}\mathrm{sen}^2\theta\right)} = h(\theta) :$$

$$dt = \frac{d\theta}{h(\theta)} \longrightarrow \boxed{t = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{h(\theta)}}$$

integro en variables separadas

Ej 2) a)



Mientras el disco rueda sin deslizarse con respecto al aro 1

$\vec v_P(\text{disco}) = 0$;

a partir de la distribución de velocidades:

$\vec v_P = \vec v_G + \vec\omega \times (P-G)$,

$\vec\omega = \dot\theta \hat k$, $\vec v_G = (R-r)\dot\varphi \hat e_\varphi$,

$P-G = r\hat e_\rho$

$$\Rightarrow 0 = [(R-r)\dot\varphi - r\dot\theta]\hat e_\varphi :$$

$$\boxed{\dot\theta = \left(\frac{R-r}{r}\right)\dot\varphi}$$

Para hallar la ecuación de movimiento que satisface φ podemos utilizar conservación de la energía del disco ($P_{\vec N}=0$, $P_{\vec T}=0$)

$E = \frac{1}{2} I_P\omega^2 + U_g$; $I_P = I_G + mr^2$, $I_G = \frac{1}{2}mr^2$,

$$U_g = -mg(R-r)\cos\varphi$$

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mr^2\right)\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot\varphi^2 - mg(R-r)\cos\varphi$$

$E(0) = -mg(R-r)\cos\varphi_0$:

$$\boxed{\frac{3}{4}m(R-r)^2\dot\varphi^2 - mg(R-r)(\cos\varphi-\cos\varphi_0) = 0}$$

b) 2ª Cardinal al disco:

$\hat{e_\rho}$) $-m(R-r)\dot{\varphi}^2 = -N + mg\cos\varphi$

$\hat{e_\varphi}$) $m(R-r)\ddot{\varphi} = T - mg\,\text{sen}\,\varphi$

de la Ec. de movimiento en a) tenemos: $\boxed{\dot{\varphi}^2 = \frac{4}{3}\frac{g}{(R-r)}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$

derivamos lo anterior: $\boxed{\ddot{\varphi} = -\frac{2}{3}\, g/(R-r)\,\text{sen}\,\varphi}$

Sustituyendo $\dot{\varphi}^2$ y $\ddot{\varphi}$ en las proyecciones de la Primera Cardinal

tenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} N &= \frac{1}{3}mg\,(7\cos\varphi - 4\cos\varphi_0) \\ T &= \frac{1}{3}mg\,\text{sen}\,\varphi \end{aligned}}$$

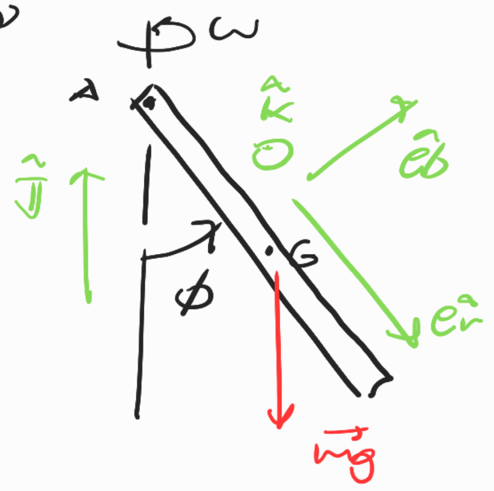
c) Para que el disco ruede sin deslizarse: $|T| \leq f_E |N|$:

$$f_E \geq \frac{|\text{sen}\,\varphi|}{|7\cos\varphi - 4\cos\varphi_0|} \;; \quad \text{como:} \left\{\begin{array}{l} \text{sen}\,\varphi \leq \text{sen}\,\varphi_0 \\ \cos\varphi \geq \cos\varphi_0 \end{array}\right. , \text{ el}$$

cociente de la expresión anterior es máximo para $\varphi = \varphi_0$:

$$f_E \geq \frac{\text{sen}\,\varphi_0}{7\cos\varphi_0 - 4\cos\varphi_0} \;: \boxed{f_E \geq \frac{1}{3}\tan\varphi_0}$$

Ej 3) a)



$$\vec{L_A} = \mathbb{I}_A \vec{\omega}$$

$$\mathbb{I}_A^{\{\hat{e_r}, \hat{e_\phi}, \hat{k}\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_A & 0 \\ 0 & 0 & I_A \end{pmatrix},$$

$$I_A = \int_0^{2l} \frac{m}{(2l)} x^2 dx = \boxed{\frac{4}{3} m l^2}$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{J} + \dot{\phi} \hat{k} :$$

$$\vec{L_A} = \mathbb{I}_A \vec{\omega} = \mathbb{I}_A (-\omega \cos\phi \, \hat{e_r} + \omega \sin\phi \, \hat{e_\phi} + \dot{\phi} \hat{k})$$

$$= -\omega \cos\phi \underbrace{\mathbb{I}_A \hat{e_r}}_{=0} + \omega \sin\phi \underbrace{\mathbb{I}_A \hat{e_\phi}}_{= I_A \hat{e_\phi}} + \dot{\phi} \underbrace{\mathbb{I}_A \hat{k}}_{= I_A \hat{k}}$$

$$\boxed{\vec{L_A} = I_A (\omega \sin\phi \, \hat{e_\phi} + \dot{\phi} \hat{k})}$$

b) 2da Cardinal desde A al rígido, proyectada según $\hat{k}$:

$$\dot{\vec{L_A}} = \vec{M_A}^{(ext)} ; \quad \dot{\vec{L_A}} \cdot \hat{k} = \underbrace{\vec{M_A}^{(ext)} \cdot \hat{k}}_{= \vec{M_A}^{(peso)} \cdot \hat{k}} :$$

(la articulación no ejerce momento según $\hat{k}$)

$$\underbrace{\dot{\vec{L_A}} \cdot \hat{k}}_{I_A (\omega \sin\phi \underbrace{\dot{\hat{e_\phi}} \cdot \hat{k}}_{-\omega \cos\phi} + \ddot{\phi})} = -mgl \sin\phi :$$

$$\boxed{\ddot{\phi} - \omega^2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi + \frac{3}{4} g/l \operatorname{sen}\phi = 0}$$

c) Equilibrio : $\ddot{\phi} = 0$:

$$\left(3/4\, g/l - \omega^2 \cos\phi\right) \operatorname{sen}\phi = 0 \; :$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\phi_{eq} = 0 \\ &\phi_{eq} = \pi \\ &\cos\phi_{eq} = \frac{3/4\, g/l}{\omega^2}, \quad \exists \text{ si } \omega^2 \geq \omega_c^2 = 3/4\, g/l \end{aligned}}$$

Estabilidad : la ecuación de movimiento es preintegrable :

$$\ddot{\phi} + \frac{dU_{eff}}{d\phi} = 0, \quad \frac{dU_{eff}}{d\phi} = \left(-\omega^2 \cos\phi + \omega_c^2\right) \operatorname{sen}\phi$$

Estudiamos entonces :

$$\frac{d^2 U_{eff}}{d\phi^2} = \left(-\omega^2 \cos\phi + \omega_c^2\right)\cos\phi + \omega^2 \underbrace{\operatorname{sen}^2\phi}_{= 1 - \cos^2\phi}$$

$$= \omega^2 + \left(\omega_c^2 - 2\omega^2 \cos\phi\right)\cos\phi$$

$$\frac{d^2 U_{eff}}{d\phi^2} = \begin{cases} (\phi_{eq} = 0) & \omega_c^2 - \omega^2 \geq 0 \quad \text{para } \omega^2 \leq \omega_c^2 : \\ & \phi_{eq} = 0 \text{ es estable para } \omega^2 \leq \omega_c^2 \\ (\phi_{eq} = \pi) & -(\omega^2 + \omega_c^2) < 0 \; : \text{ siempre inestable} \\ (\cos\phi_{eq} = (\omega_c/\omega)^2) & \dfrac{\omega^4 - \omega_c^4}{\omega^2} \geq 0 \quad \text{si } \omega^2 \geq \omega_c^2 \\ & \text{estable mientras exista} \end{cases}$$