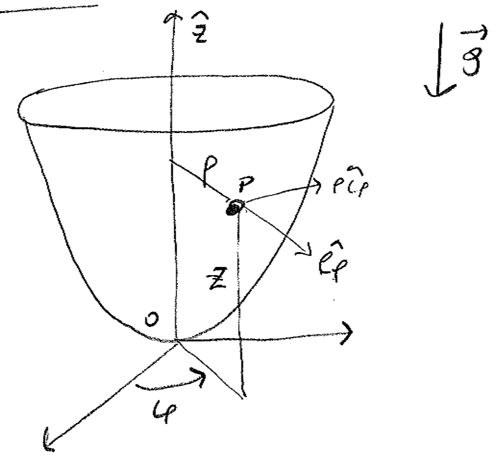
Evaluación Final 2020 / Examen, 19 de agosto de 2020

Ejercicio 7

a)



Vamos a trabajar en coordenadas cilíndricas:

$\vec{r} = P - O = \rho\hat{e_\rho} + z\hat{z}$

$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{e_\varphi} + \dot{z}\hat{z}$

$(\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{e_\rho} + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{e_\varphi} + \ddot{z}\hat{z})$

y usar el vínculo de la ec. del paraboloide:

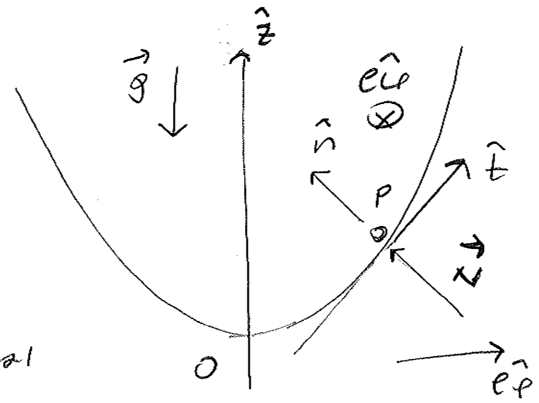
$\boxed{z = \alpha\rho^2}$: $\dot{z} = 2\alpha\rho\dot{\rho}$

i) Veamos la conservación de L_z : $L_z = \vec{L_O} \cdot \hat{z}$

donde $\vec{L_O} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{p} = m\vec{v}$; luego: $\dot{\vec{L_O}} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\dot{\vec{L_O}} = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}$

$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$, $\vec{p} = m\vec{v}$, $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ (2da ley de Newton)



- Como el contacto es liso, sólo tengo componente normal de la reacción del paraboloide
- Actúa además el peso de la partícula

$\Rightarrow \vec{F} = \vec{N} + m\vec{g}$ (la fuerza neta está contenida en el plano vertical que pasa por la partícula y el eje de revolución)

Consideremos ahora $\dot{L_z}$:

$\dot{L_z} = \frac{d}{dt}(\vec{L_O} \cdot \hat{z}) = \dot{\vec{L_O}} \cdot \hat{z} + \underbrace{\vec{L_O} \cdot \dot{\hat{z}}}_{=0} = \dot{\vec{L_O}} \cdot \hat{z} = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{z}$;

tanto $\vec{r}$ como $\vec{F}$ y $\hat{z}$ están contenidos en el mismo plano $\Rightarrow (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{z} = 0$

$\Rightarrow \dot{L_z} = 0$: $\boxed{L_z = cte}$ ✓

[otra forma, usando la expresión de L_z:

$L_z = \vec{r} \times \vec{p} \cdot \hat{z} = [(\rho\hat{e_\rho} + z\hat{z}) \times m(\dot{\rho}\hat{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{e_\varphi} + \dot{z}\hat{z})] \cdot \hat{z} = m\rho^2\dot{\varphi}$

$\Rightarrow \dot{L_z} = m(2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho^2\ddot{\varphi}) = m\rho(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})$

2da ley de Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$ proyectada según $\hat{e_\varphi}$: $0 = m\vec{a} \cdot \hat{e_\varphi}$ (no hay fuerza en esa dirección)

$\Rightarrow 0 = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}$: $\dot{L_z} = 0$ ✓]

iii) La energía también se conserva:

$\dot{E} = \mathcal{P}^{(res)}$; el peso es una fuerza conservativa, la normal es de potencia nula: $\mathcal{P}_N = \underbrace{\vec{N}}_{N\hat{n}} \cdot \vec{v}$

la velocidad es tangente a la superficie:

$\vec{v} = v_t \hat{t} + v_\varphi \hat{e_\varphi}$

$\Rightarrow \mathcal{P}_N = N v_t \underbrace{\hat{n}\cdot\hat{t}}_{=0} + N v_\varphi \underbrace{\hat{n}\cdot\hat{e_\varphi}}_{=0} = 0$

$\Rightarrow$ no tengo fuerzas residuales: $\mathcal{P}^{(res)} = 0$

$\Rightarrow \dot{E} = 0$: $\boxed{E = cte.}$ ✓

b) La energía de la partícula es:

$$E = T + U = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + mgz = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) + mgz$$

$\boxed{L_z = m\rho^2\dot{\varphi}}$: $E = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \left(\frac{L_z}{m\rho^2} \right)^2 + \dot{z}^2 \right) + mgz$;

usando ahora el vínculo $z = \alpha\rho^2$ ($\Rightarrow \dot{z} = 2\alpha\rho\dot{\rho}$):

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 (1 + 4\alpha^2\rho^2) + \frac{L_z^2}{2m\rho^2} + mg\alpha\rho^2}$$

Condiciones iniciales: $\rho = \rho_0$

$\vec{v} = v_0 \hat{e_\varphi}$: $\begin{cases} \dot{\rho}(0) = 0 \\ \dot{\varphi}(0) = v_0/\rho_0 \\ \dot{z}(0) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow L_z = L_z(0) = m\rho_0 v_0$

$E = E(0) = \frac{1}{2} m v_0^2 + mg\alpha\rho_0^2$:

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 + mg\alpha\rho_0^2 = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 (1 + 4\alpha^2\rho^2) + \frac{1}{2} m v_0^2 (\rho_0/\rho)^2 + mg\alpha\rho^2$:

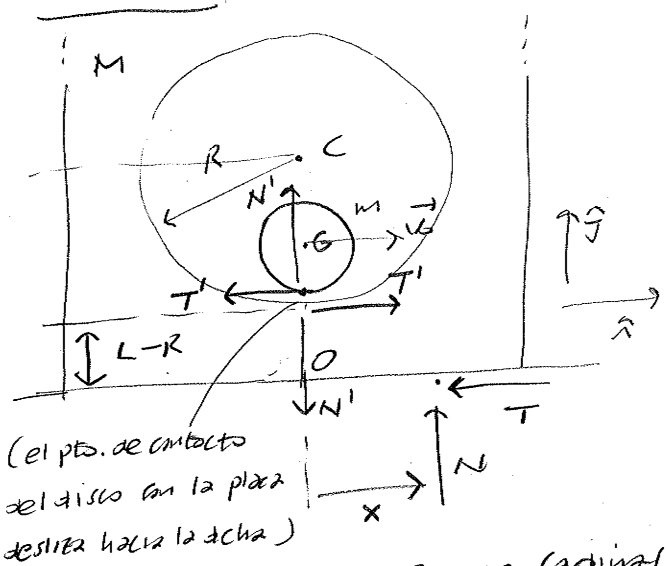
$$\dot{\rho}^2 = \frac{2}{m(1+4\alpha^2\rho^2)} \left[\frac{1}{2} m \underbrace{v_0^2}_{\alpha g \rho_0^2} (1 - (\rho_0/\rho)^2) + mg\alpha(\rho_0^2 - \rho^2) \right] = f(\rho)$$

Las distancias máxima y mínima corresponden a $\dot{\rho} = 0$: $f(\rho) = 0$:

$\frac{1}{2} \cancel{m\alpha g} \rho_0^2 (1 - (\rho_0/\rho)^2) + \cancel{mg\alpha} (\rho_0^2 - \rho^2) = 0$

$(\rho^2 - \rho_0^2) \left[\frac{1}{2} \rho_0^2/\rho^2 - 1 \right] = 0$: $\begin{cases} \rho = \rho_0 & (\rho_{máx}) \\ \rho = \rho_0/\sqrt{2} & (\rho_{mín}) \end{cases}$

Ejercicio 2



Para que la placa permanezca en reposo se debe verificar:

i) no deslizamiento con respecto al piso:

$$\boxed{T \leq f_E N} \quad (I)$$

ii) no vuelco: $\boxed{-L \leq x \leq L}$ (II), siendo x medida desde el punto medio del lado apoyado

Consideremos ahora la Primera Cardinal a la placa:

$\hat{\imath}$) $T = T'$ (i)

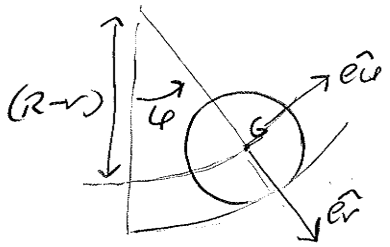
$\hat{j}$) $N - Mg - N' = 0$ (ii)

Segunda Cardinal desde el punto medio del lado apoyado (O):

$$xN = (L-R)T' \quad \text{(iii)}$$

Tenemos que considerar también la Primera Cardinal al disco en la dirección vertical para hallar N':

$$m\,\vec{a_G}(0)\cdot\hat{j} = N' - mg \;;$$



En forma general, para un tiempo cualquiera en que desliza el disco con la placa en reposo:

$$\vec{a_G}\cdot\hat{e_r} = -(R-r)\dot{\varphi}^2$$

$t=0$: $\hat{e_r} = -\hat{j}$: $\vec{a_G}(0)\cdot\hat{j} = (R-r)\dot{\varphi}^2(0)$

$$= (R-r)\left(\frac{v_0}{(R-r)}\right)^2$$

$$= \frac{v_0^2}{(R-r)} = g$$

$\Rightarrow mg = N' - mg$: $N' = 2mg$

Usando ahora que la fricción entre el disco y la placa es dinámica: $T' = f_D N' = 2 f_D mg$

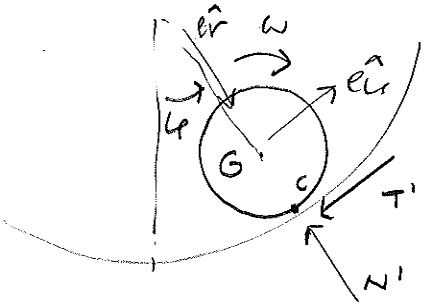
Sustituyendo T' y N' en (i)-(iii):

$T = 2 f_D m g$

$N = Mg + 2mg = (M+2m)g$ $\xrightarrow{(I)}$ $\boxed{f_E \geq f_D \left(\frac{2m}{2m+M}\right)}$

$x = \frac{(L-R)\, 2 f_D\, mg}{(M+2m)g} = \underbrace{f_D (L-R)\left(\frac{2m}{M+2m}\right)}_{>0}$ $\xrightarrow{(II)}$ $\boxed{L \geq f_D (L-R) \frac{2m}{2m+M}}$

b) Vamos a considerar las ecuaciones cardinales al disco mientras desliza $(\vec{v}_C \cdot \hat{e_\varphi} > 0)$



• Primera Cardinal:

$\hat{e_r})\ N' - mg\cos\varphi = m(R-r)\dot{\varphi}^2 \quad (1)$

$\hat{e_\varphi})\ -T' - mg\,\text{sen}\,\varphi = m(R-r)\ddot{\varphi} \quad (2)$

• Segunda Cardinal desde G:

$I_G\, \dot{\omega} = r T' \ (3), \quad I_G = \frac{1}{2} m r^2$

Para hallar las ecuaciones de movimiento debemos eliminar las reactivas entre las ecs. anteriores:

• Eliminando T' entre (2) y (3):

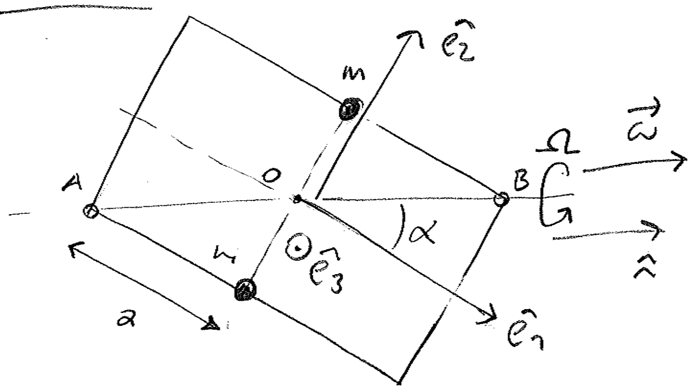
$$\boxed{\frac{1}{2} m r \dot{\omega} = -mg\,\text{sen}\,\varphi - m(R-r)\ddot{\varphi}}$$

• Usando que $T' = f_D N'$ en (2) y eliminando luego N' entre (2) y (1):

$$\boxed{-f_D\left(mg\cos\varphi + m(R-r)\dot{\varphi}^2\right) - mg\,\text{sen}\,\varphi = m(R-r)\ddot{\varphi}}$$

Ejercicio 3

a)



$\{\hat{e_1}, \hat{e_2}, \hat{e_3}\}$: base solidaria al rígido

$\vec{\omega} = \Omega \hat{x}$ ($\hat{x}$ horizontal)

El momento angular del rígido visto desde O es:

$\vec{L_0} = \mathbb{I}_0 \vec{\omega}$ ($\vec{v_0} = 0$)

escribamos $\mathbb{I}_0$, $\vec{\omega}$ en la base $\{\hat{e_1}, \hat{e_2}, e_3\}$, que es principal para el tensor:

$\vec{\omega} = \Omega \hat{x} = \Omega (\cos\alpha \, \hat{e_1} + \operatorname{sen}\alpha \, \hat{e_2})$; $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + (a/2)^2}} = \boxed{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

$$I_0 \{\hat{e_1}, \hat{e_2}, \hat{e_3}\} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 + I_2 \end{pmatrix}$$ (rígido plano)

con $I_1 = I_1(\text{placa}) + 2\,(m(a/2)^2) = \boxed{\dfrac{M a^2}{12} + \dfrac{m a^2}{2}}$

$I_2 = I_2(\text{placa}) = \dfrac{M(2a)^2}{12} = \boxed{\dfrac{M a^2}{3}}$

$\Rightarrow \vec{L_0} = I_1 \Omega \cos\alpha \, \hat{e_1} + I_2 \Omega \operatorname{sen}\alpha \, \hat{e_2}$

$$\boxed{\vec{L_0} = \left(\frac{M}{6} + m\right) \frac{a^2 \Omega}{\sqrt{5}} \hat{e_1} + \frac{M a^2}{3} \frac{\Omega}{\sqrt{5}} \hat{e_2}}$$

b) $\vec{M_0}^{(ext)} = \vec{M_0}^{(react)}$ (ya que el peso no hace momento desde O)

$\Rightarrow \vec{M_0}^{(react)} = \vec{M_0}^{(ext)} = \dot{\vec{L_0}}$ (Segunda Cardinal desde O $[\dot{O} = 0]$)

$\dot{\vec{L_0}} = \left(\dfrac{M}{6} + m\right) \dfrac{a^2 \Omega}{\sqrt{5}} \dot{\hat{e_1}} + \dfrac{M a^2}{3} \dfrac{\Omega}{\sqrt{5}} \dot{\hat{e_2}}$;

$\dot{\hat{e_1}} = \vec{\omega} \times \hat{e_1} = \Omega \operatorname{sen}\alpha \, \hat{e_2} \times \hat{e_1} = -\Omega \operatorname{sen}\alpha \, \hat{e_3} = -\Omega/\sqrt{5} \, \hat{e_3}$

$\dot{\hat{e_2}} = \vec{\omega} \times \hat{e_2} = \Omega \cos\alpha \, \hat{e_1} \times \hat{e_2} = \Omega \cos\alpha \, \hat{e_3} = 2\Omega/\sqrt{5} \, \hat{e_3}$

$\Rightarrow \dot{\vec{L_0}} = -\left(\frac{M}{6}+m\right) \frac{a^2\Omega^2}{5} \hat{e_3} + \frac{2}{3} M a^2 \frac{\Omega^2}{5} \hat{e_3} =$

$= \frac{a^2\Omega^2}{5}\left[-\left(\frac{M}{6}+m\right) + \frac{2}{3}M\right]\hat{e_3} = \boxed{\frac{a^2\Omega^2}{5}\left(\frac{M}{2}-m\right)\hat{e_3} = \vec{M_0}^{(reacc)}}$

Para que el momento se anule: $\boxed{m = \frac{M}{2}}$

Obs: volvamos a la expresión primaria para $\vec{L_0}$:

$\vec{L_0} = I_1 \Omega \cos\alpha \, \hat{e_1} + I_2 \Omega \operatorname{sen}\alpha \, \hat{e_2}$;

con la cual vamos a operar para su derivación de la sig. forma:

$\dot{\vec{L_0}} = \underbrace{\frac{d'}{dt}\vec{L_0}}_{\text{derivada relativa en } \{\hat{e_1},\hat{e_2},\hat{e_3}\}} + \vec{\omega} \times \vec{L_0} = \vec{\omega} \times \vec{L_0}$ (como Ω es constante, no tengo derivada relativa)

$\Rightarrow \dot{\vec{L_0}} = (\Omega \cos\alpha \, \hat{e_1} + \Omega \operatorname{sen}\alpha \, \hat{e_2}) \times (I_1 \Omega \cos\alpha \, \hat{e_1} + I_2 \Omega \operatorname{sen}\alpha \, \hat{e_2})$

$= \boxed{\Omega^2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \, (I_2 - I_1)\, \hat{e_3}}$; para anularse, $I_2 = I_1$:

$\frac{M\cancel{a^2}}{3} = \frac{M\cancel{a^2}}{12} + \frac{m\cancel{a^2}}{2}$

$\frac{M}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{m}{2}$: $\boxed{\frac{M}{2} = m}$ ✓

$\Rightarrow$ $I_2 = I_1$ hace que desaparezca el par reactivo:

si $I_2 = I_1$, cualquier vector en el plano $[\hat{e_1}, \hat{e_2}]$, es vector propio de $\mathbb{I}_0$ (en particular $\hat{\lambda}$ lo es): $\hat{\lambda} = \cos\alpha \, \hat{e_1} + \operatorname{sen}\alpha \, \hat{e_2}$: $\mathbb{I}_0 \hat{\lambda} = \cos\alpha \underbrace{\mathbb{I}_0 \hat{e_1}}_{I_1\hat{e_1}} + \operatorname{sen}\alpha \underbrace{\mathbb{I}_0 \hat{e_2}}_{I_2\hat{e_2}}$

$= I_1 \cos\alpha \, \hat{e_1} + I_2 \operatorname{sen}\alpha \, \hat{e_2} \overset{(I_2 = I_1)}{=} I_1 (\cos\alpha \, \hat{e_1} + \operatorname{sen}\alpha \, \hat{e_2}) = I_1 \hat{\lambda}$ ✓

$\Rightarrow \vec{M_0}^{(reacc)} = \dot{\vec{L_0}} = \vec{\omega} \times \vec{L_0} = \vec{\omega} \times (\mathbb{I}_0 \vec{\omega}) = \vec{\omega} \times (\Omega \, \mathbb{I}_0 \hat{\lambda}) =$

$= \vec{\omega} \times (I_1 \Omega \hat{\lambda}) = I_1 \vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$ ✓