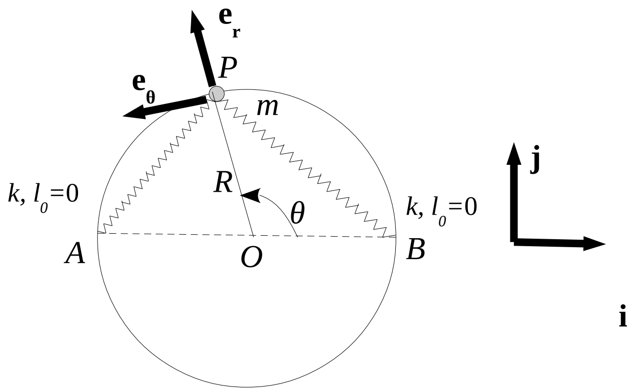
Solución del Ejercicio 1

a) Sea *P* la partícula de masa *m, O* el centro del aro de radio *R*, y sean *A* y *B* los extremos de su diámetro en cuyos extremos se hallan sujetos los resortes de constante *k* y longitud natural nula que están unidos a la partícula *P*, como se muestra en la figura.



Sean $\hat{i},\hat{j}$ los versores fijos de la figura y $\hat{e}_r,\hat{e}_\theta$ los versores móviles que siguen a *P*, siendo *θ* el ángulo que forma OP con el versor $\hat{i}$.
Como la longitud natural de los resortes es nula, si $\vec{r}_{AP}$ es el vector que va de *A* a *P* y $\vec{r}_{BP}$ es el vector que va de *B* a *P*, las fuerzas de los resortes serán. Respectivamente, $\vec{F}_1=-k\vec{r}_{AP}$ y $\vec{F}_2=-k\vec{r}_{BP}$.
Ahora tenemos, mediante adición de vectores, $\vec{F}_1=-k\vec{r}_{AP}=-k(R\hat{i}+R\hat{e}_r)$ y $\vec{F}_2=-k\vec{r}_{BP}=-k(-R\hat{i}+R\hat{e}_r)$. Sumando ambas fuerzas, se obtiene $\vec{F}_{tot}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=-k(R\hat{i}+R\hat{e}_r)\pm k(-R\hat{i}+R\hat{e}_r)=-2kR\hat{e}_r=-k_{eq}R\hat{e}_r$. Luego hemos probado lo que se nos pedía y $k_{eq}=2k$.

b) Si queremos que el movimiento sea circular uniforme, no debe haber fuerza neta en la dirección tangencial al movimiento de *P*. Puesto que la única fuerza en dicha dirección es la fuerza de rozamiento dinámico con el aro (recordar que no actúa el peso), dada por $\vec{F}_{roz}=-f\|\vec{N}\|\hat{e}_\theta$, luego necesitaremos que la normal con el aro sea nula para que esto se verifique. Si escribo la ecuación de Newton en la dirección radial, para un movimiento circular uniforme con velocidad v_0, obtengo: $-\frac{mv_0^2}{R}=N-2kR$. Luego, para que la normal sea nula, debemos tener $v_0=R\sqrt{\frac{2k}{m}}=R\sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$.

c) Ahora suponemos $v_0>R\sqrt{\frac{2k}{m}}$. Las ecuaciones de Newton para *P* en el caso general, expresadas en coordenadas polares quedan como:

$$\hat{e}_r)\quad -mR\dot{\theta}^2=N-2kR$$
$$\hat{e}_\theta)\quad mR\ddot{\theta}=-f|N|$$

A partir de la componente radial tenemos $N=2kR-mR\dot{\theta}^2$

Puesto que $v_0>R\sqrt{\frac{2k}{m}}$, tenemos $|N|=-2kR+mR\dot{\theta}^2$.

Luego, en este caso, la ecuacion de movimiento para la partícula será $\ddot{\theta}+f\dot{\theta}^2=\frac{2kf}{m}$.

d) Si se alcanza una velocidad límite v_∞, en ese instante tendremos $\ddot{\theta}=0$ y $\dot{\theta}=\frac{v_\infty}{R}$.

Sustituyendo en la ecuación de movimiento obtenemos: $\frac{fv_\infty^2}{R^2}=\frac{2kf}{m}$. Luego $v_\infty=R\sqrt{\frac{2k}{m}}$.
Adicionalmente, si usamos que para el movimiento circular $v=R\dot{\theta}$, la ecuación de movimiento queda como $\dot{v}=\frac{2kfR}{m}-\frac{fv^2}{R}=\frac{f(v_\infty^2-v^2)}{R}$, que es de variables separables.

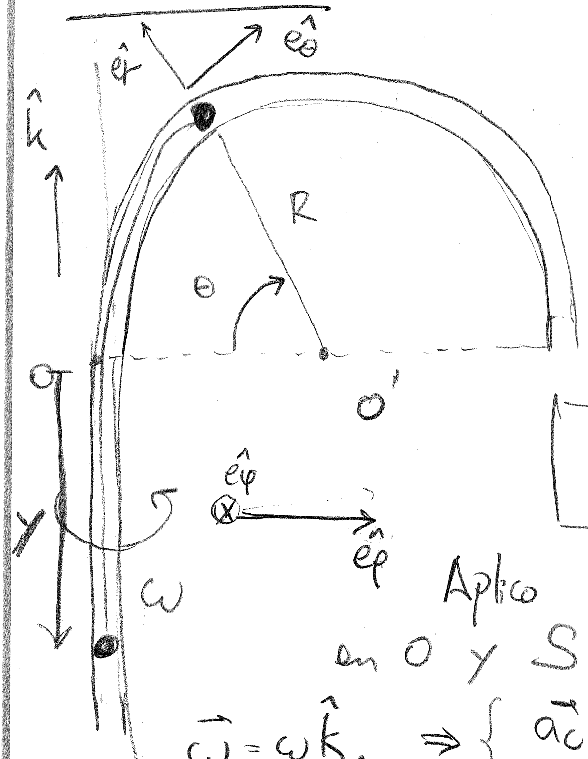
Integrando a ambos lados, obtenemos $\ln\left(\frac{v_\infty+v}{v_\infty-v}\right)=\frac{2f\,v_\infty t}{R}+C$, donde *C* debe ajustarse por las condiciones iniciales. Usando que la velocidad inicia en *t*=0 es $v=v_0$, debemos tener $C=\ln\left(\frac{v_\infty+v_0}{v_\infty-v_0}\right)$. Sea $D=e^C$. Despejando la velocidad obtenemos $v=v_\infty\left(\frac{De^{\frac{2f\,v_\infty t}{R}}-1}{1+De^{\frac{2f\,v_\infty t}{R}}}\right)$. Claramente, en el límite de $t\to+\infty$, tenemos $v\to v_\infty$, como queríamos demostrar.

Para hallar el trabajo realizado por el rozamiento entre el instante inicial y el instante final en que se alcanza la velocidad límite, basta notar que la única fuerza que trabaja será la de rozamiento, ya que tanto la fuerza neta de los resortes como la normal son perpendiculares a la velocidad de la partícula en todo instante, y por tanto de potencia nula. Aplicando el teorema del trabajo y la energía, tenemos que el trabajo total (en este caso, solo el trabajo de la fuerza de rozamiento) debe ser igual a la variación de energía cinética, o sea $W=\Delta T=\frac{m v_\infty^2}{2}-\frac{m v_0^2}{2}=\frac{m}{2}\left(\frac{2R^2k}{m}-v_0^2\right)$. Observamos que claramente este trabajo es menor que cero, dado que $v_0>R\sqrt{\frac{2k}{m}}$, como debe ser, ya que el rozamiento solo puede restar energía cinética al sistema y nunca aumentarla.

ejercicio 2:

$\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi \rightarrow$ solidarios al tubo

$\hat{e}_r, \hat{e}_\theta \longrightarrow$ solidarios a la partícula



a) considero el sistema relativo S'

$S' \rightarrow O' : \{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{k}\}$ solidario al tubo.

$\vec{r}\,' = R\hat{e}_r \qquad \vec{v}\,' = R\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

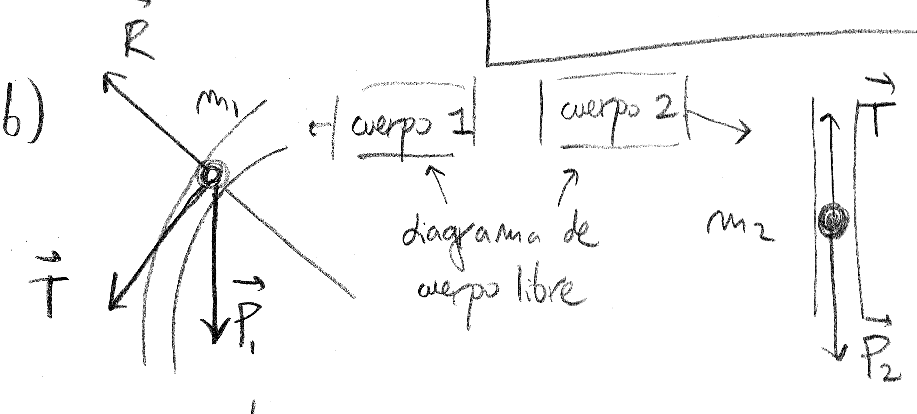
$$\boxed{\vec{a}\,' = -R\dot{\theta}^2\hat{e}_r + R\ddot{\theta}\hat{e}_\theta}$$

Aplico Coriolis entre el sistema absoluto con origen en O y S':

$$\underline{\vec{\omega} = \omega\hat{k}.} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_C = 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,' = 2R\omega\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\varphi \\ \vec{a}_T = \vec{a}_{O'} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') = -R\omega^2\hat{e}_\rho + \omega^2 R\cos\theta\,\hat{e}_\rho \end{cases}$$

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_T + \vec{a}_C \longrightarrow \boxed{\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{e}_r + R\ddot{\theta}\hat{e}_\theta + (\cos\theta - 1)R\omega^2\hat{e}_\rho + 2\omega R\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\varphi}$$

b)



2 ley de Newton:

→ cuerpo 1: $-mg\hat{k} - T\hat{e}_\theta + N\hat{e}_r = m\vec{a}$ (I)

→ cuerpo 2: $-T + mg = m\ddot{y}$ (II)

→ vínculo: $y + R\theta = cte$ (largo de la cuerda es cte.) $\longrightarrow \boxed{\ddot{y} = -R\ddot{\theta}}$ (III)

Proyecto según $\hat{e}_\theta$ la ec. (I)

$\hat{e}_\rho\cdot\hat{e}_\theta = \operatorname{sen}\theta$

$\hat{e}_\varphi\cdot\hat{e}_\theta = 0$

$\hat{e}_r\cdot\hat{e}_\theta = 0$

$\hat{k}\cdot\hat{e}_\theta = \cos\theta$

$\Rightarrow \quad -mg\cos\theta - T = Rm\left[\ddot{\theta} + \omega^2(-1+\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\right]$ (I')

sustituyo (III) en (II) y luego cancelo T en (I')

ejercicio 2 (continuación):

$$\boxed{2R\ddot{\theta} + g(1+\cos\theta) - R\omega^2(1-\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta = 0}$$ ← ecuación de movimiento

c) $\tilde{\theta} = \frac{\pi}{2}$ es pto. de equilibrio $\Rightarrow$ $\ddot{\theta}(\theta=\tilde{\theta}) = 0$

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ sustituyo en la ecuación de mov.

$\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$ $\Rightarrow \boxed{\omega^2 = g/R}$

estabilidad: el 2° y 3° término de la ec. de mov. representan la derivada de un potencial efectivo

$$\frac{dU_{ef}}{d\theta} = \left[g(1+\cos\theta) - R\omega^2(1-\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta\right] \cdot m$$

para estudiar la estabilidad nos interesa el signo de $\left.\frac{d^2U_{ef}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\tilde{\theta}}$

$$\left.\frac{d^2U_{ef}}{d\theta^2}\right|_{\theta=\tilde{\theta}} = \left[-g\,\text{sen}\,\theta - R\omega^2\,\text{sen}^2\theta - (1-\cos\theta)\cos\theta\right]_{\theta=\pi/2}$$

$$= -(g+R\omega^2) < 0 \longrightarrow \underline{\underline{\text{inestable}}}$$

d) preintegro la ec. de mov

$$\rightarrow R\dot{\theta}^2 + g(\theta + \text{sen}\,\theta) + R\omega^2\left(-\cos\theta - \frac{\text{sen}^2\theta}{2}\right) = \mathbb{C}$$

($\mathbb{C}$ depende de las condiciones iniciales: $\theta_0 = \pi/2$; $\dot{\theta}(\theta=\theta_0) = 0$

$$\Rightarrow 0 + g\left(\frac{\pi}{2}+1\right) + R\omega^2\left(-0-\frac{1}{2}\right) = \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C} = g\left(1+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{R\omega^2}{2}$$
)

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + (1-\text{sen}\,\theta)\right] + \omega^2\left[-\cos\theta + \frac{1}{2}(1-\text{sen}^2\theta)\right]}$$

ejercicio 2 (hoja final):

$\operatorname{sen} \pi = 0$

$\cos \pi = -1$

una vez obtenido $\dot{\theta}^2(\theta)$ evalúo en $\theta_f = \pi$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2(\pi) = \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{g}{R} + \frac{3}{2}\omega^2 \qquad \left(\omega^2 = \frac{g}{R} \text{ por parte c)}\right)$$

$$\boxed{\dot{\theta}^2(\pi) = \frac{5 - \pi}{2} \cdot \frac{g}{R}}$$

velocidad absoluta: (Teo. de Roverbal)

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = R\dot{\theta}\hat{e_\theta} + R\omega(1 - \cos\theta)\hat{e_\varphi}$$

evalúo en $\theta_f = \pi$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(\theta = \theta_f) = \sqrt{gR}\left(\sqrt{\frac{5-\pi}{2}}\,\hat{e_\theta} + 2\,\hat{e_\varphi}\right)}$$