Ejercicio 1

a) $\vec{f_1} + \vec{f_2} = m\vec{a}$; $\vec{f_1} = f(r)\hat{e_r}$, $\vec{f_2} = -b\vec{v} = -b(\dot{r}\hat{e_r} + r\dot{\theta}\hat{e_\theta})$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e_\theta}$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \hat{e_r}) \\ \hat{e_\theta}) \end{array} \left| \begin{array}{ll} f(r) - b\dot{r} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) & (i) \\ -br\dot{\theta} = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) & (ii) \end{array} \right|$$

b) multiplicando por r en (ii):

$$-br^2\dot{\theta} = m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta})$$

usando que $l = mr^2\dot{\theta}$, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$-\frac{b}{m} l = \dot{l}$$

que integrada en el tiempo da:

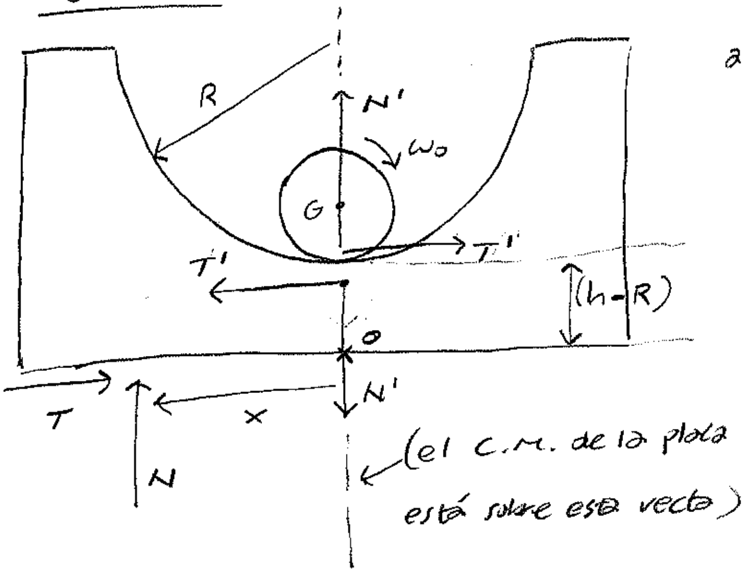
$$l(t) = l(0) e^{-b/m\, t} \qquad \left(\Gamma = \frac{b}{m} \right)$$

c) Para una órbita circular $r = cte.$, lo que hace que la ec. (i) se reduzca a:

$$f(r) = -mr\dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{\theta} = cte.$$

Por otro lado $l = mr^2\dot{\theta}$, que para $r = cte$, $\dot{\theta} = cte$ da $l = cte$, lo que es contradictorio con el resultado de b)

Ejercicio 2



a) 1era Cardinal a la placa:

$$N - Mg - N' = 0 \quad (i)$$

$$T = T' \quad (ii)$$

2da Cardinal desde el pto medio de la base (O):

$$xN = (h-R)T' \quad (iii)$$

1era C al disco en la dirección vertical:

$$N' = mg \quad (iv)$$

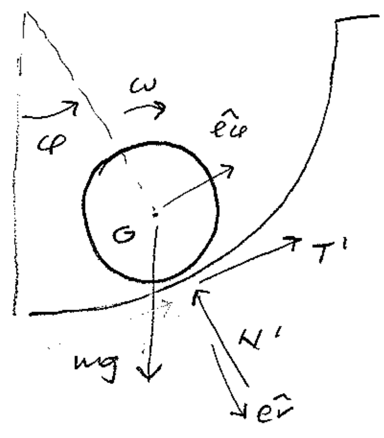
Usando que la fricción entre el disco y la placa es cinética:

$$T' = f_D N' \quad (v)$$

. Para que la placa se mantenga en reposo no debe deslizar ni volcar: $\begin{cases} T \leq f_E N \\ -L \leq x \leq L \end{cases}$

que usando (i-v), se puede reescribir como: $\boxed{\begin{cases} f_E \geq f_D \left(\dfrac{m}{m+M} \right) \\ L \geq (h-R) f_D \left(\dfrac{m}{m+M} \right) \end{cases}}$

b)



1era Cardinal al disco:

$$\hat{e}_r)\ N' - mg\cos\varphi = m(R-r)\dot{\varphi}^2 \quad (I)$$

$$\hat{e}_\varphi)\ T' - mg\,\text{sen}\,\varphi = m(R-r)\ddot{\varphi} \quad (II)$$

2da Cardinal desde G:

$$I_G \dot{\omega} = -rT' \quad (III) \quad , \quad I_G = \frac{mr^2}{2}$$

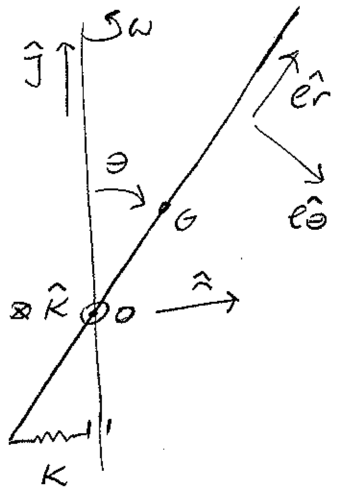
Eliminando T' entre (II) y (III):

$$\boxed{-\frac{mr}{2}\dot{\omega} - mg\,\text{sen}\,\varphi = m(R-r)\ddot{\varphi}}$$

Usando (v) en (II) y eliminando N' entre (I) y (II):

$$\boxed{f_D\left(mg\cos\varphi + m(R-r)\dot{\varphi}^2\right) - mg\,\text{sen}\,\varphi = m(R-r)\ddot{\varphi}}$$

Ejercicio 3



a) 2^{da} Cardinal a la barra desde O, proyectada según $\hat{k}$

(de manera de que no intervengan las reactivas en O):

$$\vec{M}_O^{(act)} \cdot \hat{k} = \dot{\vec{L}}_O \cdot \hat{k}$$

$$\vec{L}_O = \mathbb{I}_O \vec{\omega} \quad ; \quad \vec{\omega} = \omega \hat{j} + \dot{\theta} \hat{k}$$

$$\mathbb{I}_O^{\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{k}\}} = I_O \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_O = \int_{-L}^{3L} \left(\frac{m}{4L}\right) dx\, x^2 = \frac{7}{3} mL^2$$

$$\vec{\omega} = \omega \cos\theta\, \hat{e}_r - \omega \operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_\theta + \dot{\theta} \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_O = I_O \left(-\omega \operatorname{sen}\theta\, \hat{e}_\theta + \dot{\theta} \hat{k} \right)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}}_O \cdot \hat{k} = I_O \left(-\omega \operatorname{sen}\theta\, \vec{\omega} \times \hat{e}_\theta \cdot \hat{k} + \ddot{\theta} \right) = I_O \left(\ddot{\theta} - \omega^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \right)$$

$$\vec{M}_O^{(act)} \cdot \hat{k} = mgL \operatorname{sen}\theta - KL^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{mgL \operatorname{sen}\theta - KL^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = I_O \left(\ddot{\theta} - \omega^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \right)}$$

b) equilibrio relativo: $\ddot{\theta} = 0$;

$$mgL \operatorname{sen}\theta - KL^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = - I_O \omega^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = - \frac{7}{12} mL^2 \omega^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta \left[g/L + \left(\frac{7}{3} \omega^2 - \frac{K}{m} \right) \cos\theta \right] = 0 \quad : \quad \operatorname{sen}\theta = 0 : \quad \theta = 0, \pi$$

$$\cos\theta = \frac{g/L}{\left(K/m - 7/3\, \omega^2 \right)} \quad , \ \exists \text{ si:}$$

$$\left| \frac{g/L}{K/m - 7/3\, \omega^2} \right| \leq 1$$