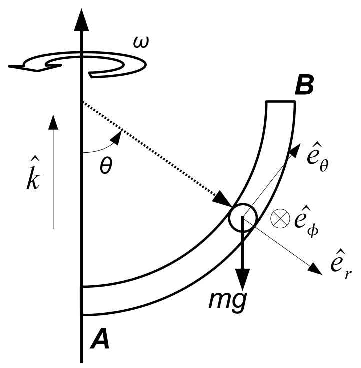
Solución examen 4 de febrero de 2009

Mecánica Newtoniana

Ejercicio 1



1. Considerando la segunda ley de Newton proyectada según $\hat{e_\theta}$ nos queda:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 cos\theta\right) sen\theta = 0$$

2. Preintegrando la ecuación anterior nos queda:

$$\dot{\theta}^2 - \dot{\theta_0}^2 + \frac{2g}{R}(1 - cos\theta) - \omega^2 sen^2\theta = 0$$

siendo $R\dot{\theta_0}$ la velocidad inicial relativa al tubo (en este caso vale cero). Para que la partícula alcance el punto B alcanza con pedir $\dot{\theta}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (se verifica que $\dot{\theta}^2 > 0$ en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, garantizando que efectivamente la partícula recorre el tubo entre A y B), de donde resulta:

$$\omega^2 = \frac{2g}{R}$$

3. Bajo la condición anterior, la ecuación de movimiento preintegrada nos da que:

$$\dot{\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dot{\theta_0} = \frac{v_0}{R} \Rightarrow \vec{v}'_B = v_0\hat{k}$$

4. Sumándole a $\vec{v}'_B$ la velocidad de transporte tenemos: $\vec{v}_B = v_0\hat{k} + \omega R\hat{e_\phi}\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$. La ley horaria para la altura de la partícula medida desde A es:

$$z(t) = R + v_0 t - \frac{g}{2}t^2$$

El tiempo t^*que demora la partícula en llegar a $z = 0$ es aquel que verifica:

$$R + v_0 t' - \frac{g}{2}t'^2 = 0 \Leftrightarrow t' = \frac{v_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gR}{v_0^2}}\right)$$

y la distancia a la que estará de A para ese tiempo es:

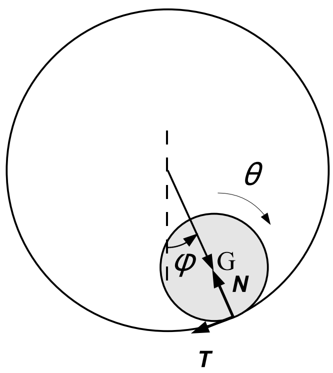
$$d = \sqrt{\left(\omega R t'\right)^2 + R^2}$$

Ejercicio 2

1. La velocidad lineal de G (observe que como $\vec{\omega} = 0$, la velocidad lineal será la misma para cualquier punto) es:
$$\vec{v_G} = -Lsen\theta\dot{\theta}\hat{i} - Lcos\theta\dot{\theta}\hat{j}$$
con $\hat{i}$ horizontal derecha, $\hat{j}$ vertical arriba. A partir de la conservación de la energía tenemos que:
$$\frac{m}{2}v_G^2 = mgLsen\theta \Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{L}sen\theta$$
y derivando con respecto al tiempo nos queda la aceleración angular de AB:
$$\ddot{\theta} = \frac{g}{L}cos\theta$$
(sustituyendo $\dot{\theta}$ se tiene la velocidad de G en términos de θ).

2. Sean R_{Bx} y R_{By} las componentes (horizontal y vertical respectivamente) de la reacción en B y sea R_C la reacción (horizontal) en C. La primera cardinal al bloque nos da:
$$\begin{aligned} R_{Bx} + R_C &= -mL(cos\theta\dot{\theta}^2 + sen\theta\ddot{\theta}) \\ R_{By} - mg &= mL(sen\theta\dot{\theta}^2 - cos\theta\ddot{\theta}) \end{aligned}$$
y la segunda cardinal en G:
$$h\,(R_C - R_{Bx}) = bR_{By}$$
De las ecuaciones anteriores resulta:
$$\begin{aligned} R_{Bx} &= -\frac{3}{2}mgsen\theta\left(\frac{b}{h}sen\theta + cos\theta\right) \\ R_{By} &= 3mgsen^2\theta \\ R_C &= \frac{3}{2}mgsen\theta\left(\frac{b}{h}sen\theta - cos\theta\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 3



1. Sea θ el ángulo de giro propio del disco. La rodadura sin deslizamiento implica:
$$r\dot{\theta} = (R - r)\dot{\varphi}$$
A partir de la conservación de la energía tenemos
$$\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\dot{\theta}^2 - mg(R-r)cos\varphi = cte.$$
que sustituyendo el vínculo dado por la rodadura sin deslizamiento se simplifica a:
$$\frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 - mg(R-r)cos\varphi = cte.$$

La segunda cardinal al disco desde G nos da

$$rT = \frac{mr^2}{2}\ddot{\theta} \Leftrightarrow T = \frac{m(R-r)}{2}\ddot{\varphi}$$

donde la última igualdad viene de la rodadura sin deslizamiento. Derivando la ecuación de movimiento obtenemos $\ddot{\varphi}$, por lo que la segunda cardinal resulta en

$$T = -\frac{mg}{3} sen\varphi$$

Por otro lado, la primera cardinal al disco proyectada según la dirección radial es

$$m(R-r)\dot{\varphi}^2 = N - mgcos\varphi$$

y utilizando las condiciones iniciales: $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ en la ecuación de movimiento, se simplifica a

$$N = \frac{mg}{3}\left(7cos\varphi - 4cos\varphi_0\right)$$

2. Para que se dé la rodadura sin deslizamiento se debe cumplir que

$$|T| \leq f|N| \Rightarrow |sen\varphi| \leq f(7cos\varphi - 4cos\varphi_0) \Leftrightarrow f \geq \frac{|sen\varphi|}{(7cos\varphi - 4cos\varphi_0)}$$

En virtud de que $sen\varphi \leq sen\varphi_0$, $cos\varphi \geq cos\varphi_0$, el cociente de la expresión anterior será máximo para $\varphi = \varphi_0$:

$$f \geq \frac{1}{3}|tg\varphi_0|$$