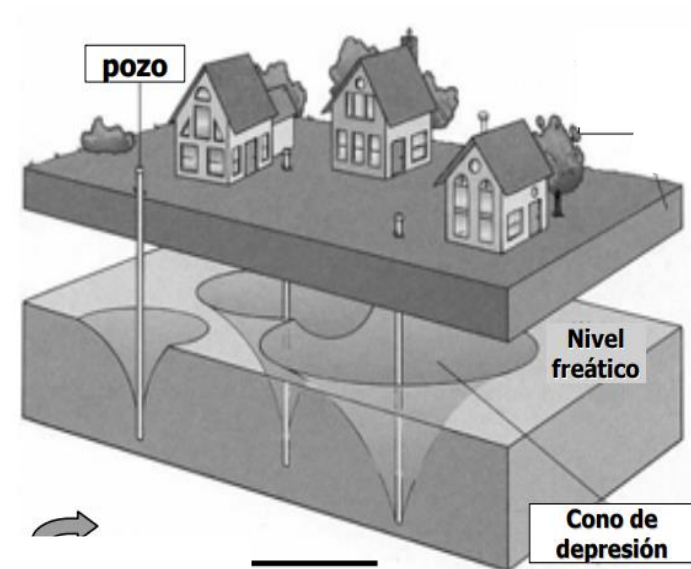


## SUPERPOSICIÓN DE EFECTOS 2: TEORÍA DE LAS IMÁGENES



Edición 2024

Manuel Giménez

Instituto de Mecánica de los Fluidos e Ingeniería Ambiental (IMFIA)

Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay

[mgimenez@fing.edu.uy](mailto:mgimenez@fing.edu.uy)

# SUPERPOSICIÓN DE EFECTOS 2: TEORÍA DE LAS IMÁGENES

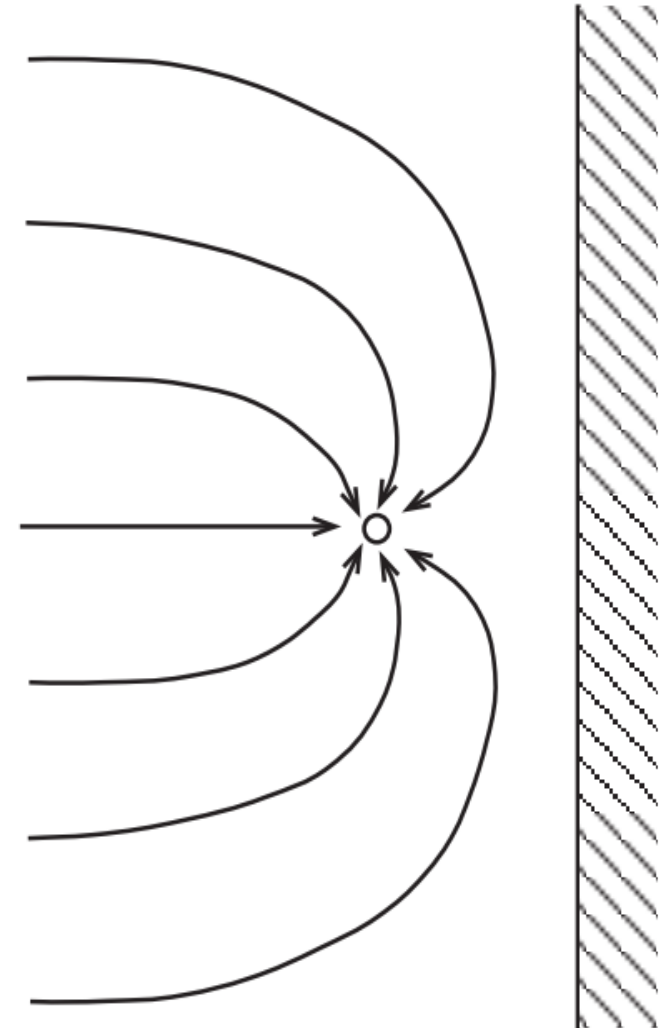
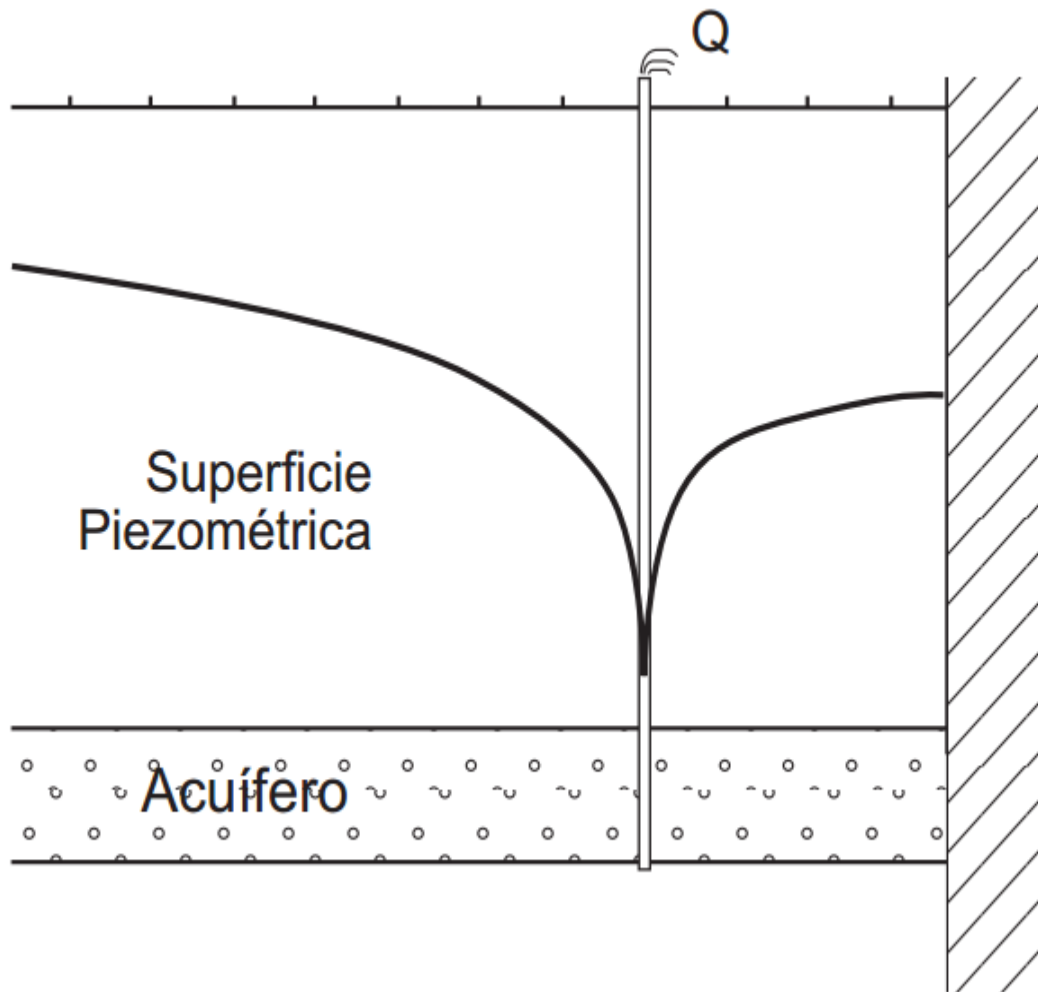
## Objetivos

- ❖ Resolver problemas en acuíferos limitados.
- ❖ Conocer la teoría de las imágenes.
- ❖ Reconocer los efectos de barreras positivas y negativas en ensayos de bombeo.
- ❖ Utilizar la teoría de las imágenes para resolver problemas con varias barreras.

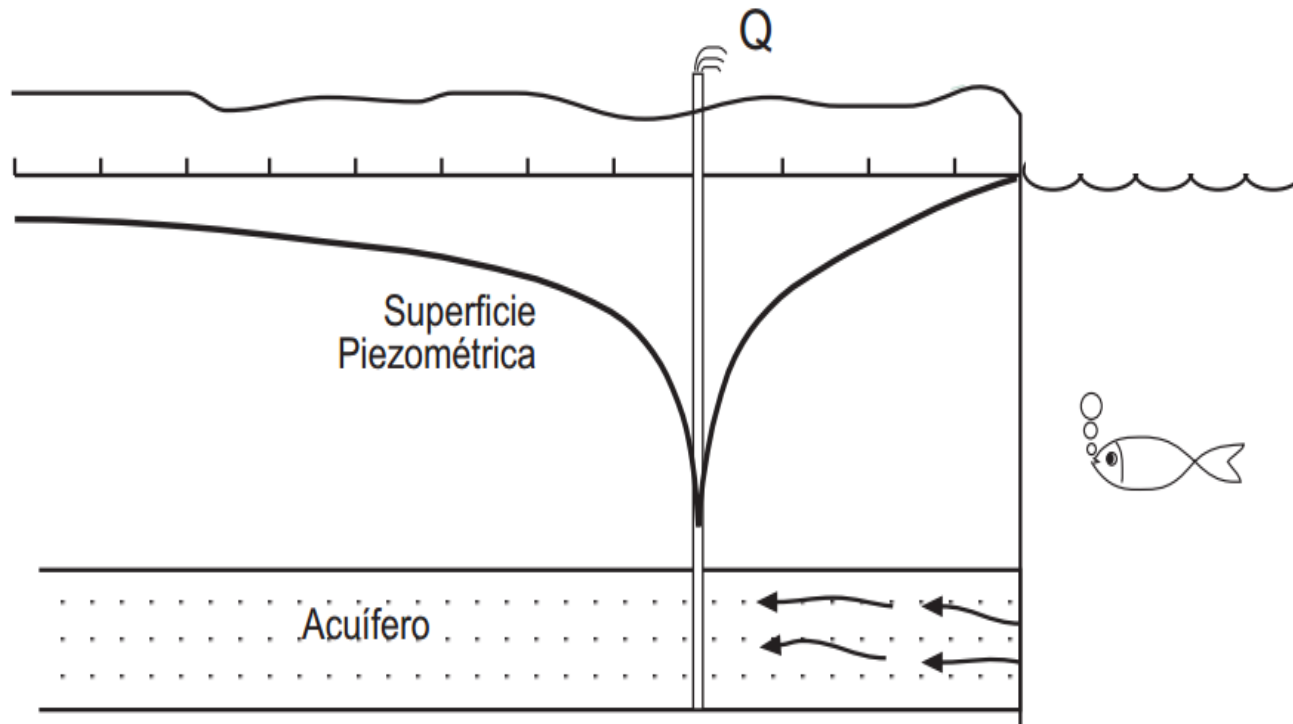
# Aplicaciones de la ley de superposición en hidrología subterránea:

1. Cálculo de descensos en un campo de bombeo. A la inversa también se puede aplicar.
2. Diferencial de extracción.
3. Recuperación de niveles.
4. Teoría de las imágenes.

# BARRERA NEGATIVA O BORDE IMPERMEABLE



# BARRERA POSITIVA O BORDE CON CARGA CONSTANTE



Borde positivo. Cuando el cono toca el lago, ya no baja más por ese lado. Continúa bajando por el lado opuesto generándose el cono asimétrico, hasta alcanzar el régimen permanente: todo el caudal extraído proviene ya del lago

# Teoría de las imágenes

## POZOS EN ACUÍFEROS LIMITADOS

Deja de valer la hipótesis del acuífero de extensión infinita

**TEORÍA DE LA IMÁGENES:** el problema se resuelve sustituyendo el sistema hidráulico por uno equivalente: asumiendo acuífero infinito, introduciendo pozos imaginarios y aplicando el principio de superposición.

$$s = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot Z_i(r_i, t_i)$$

$Q_i$ : puede ser positivo o negativo, según sea pozo de bombeo o de recarga

$Z_i$ : función de pozo correspondiente

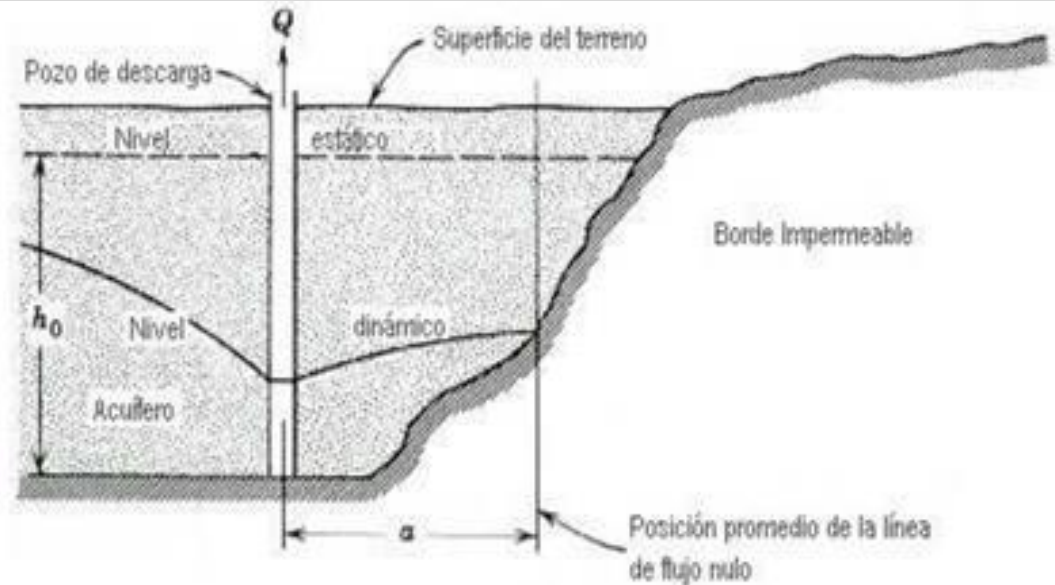
$r_i$ : es la distancia de cada pozo al punto donde queremos hallar los descensos

$t_i$ : tiempo de bombeo o recarga de cada pozo

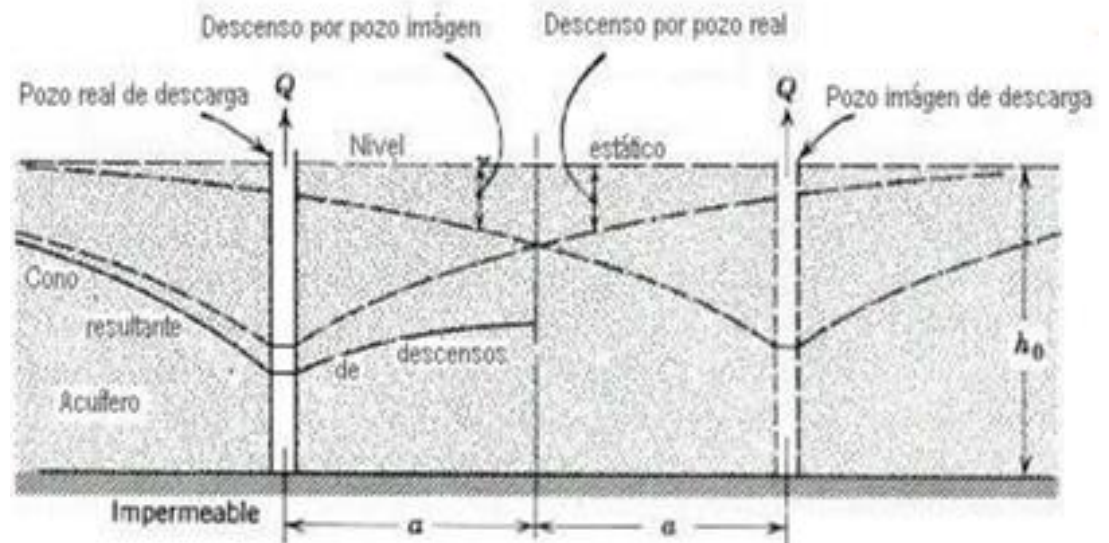
$\Sigma$

# BARRERA NEGATIVA O BORDE IMPERMEABLE

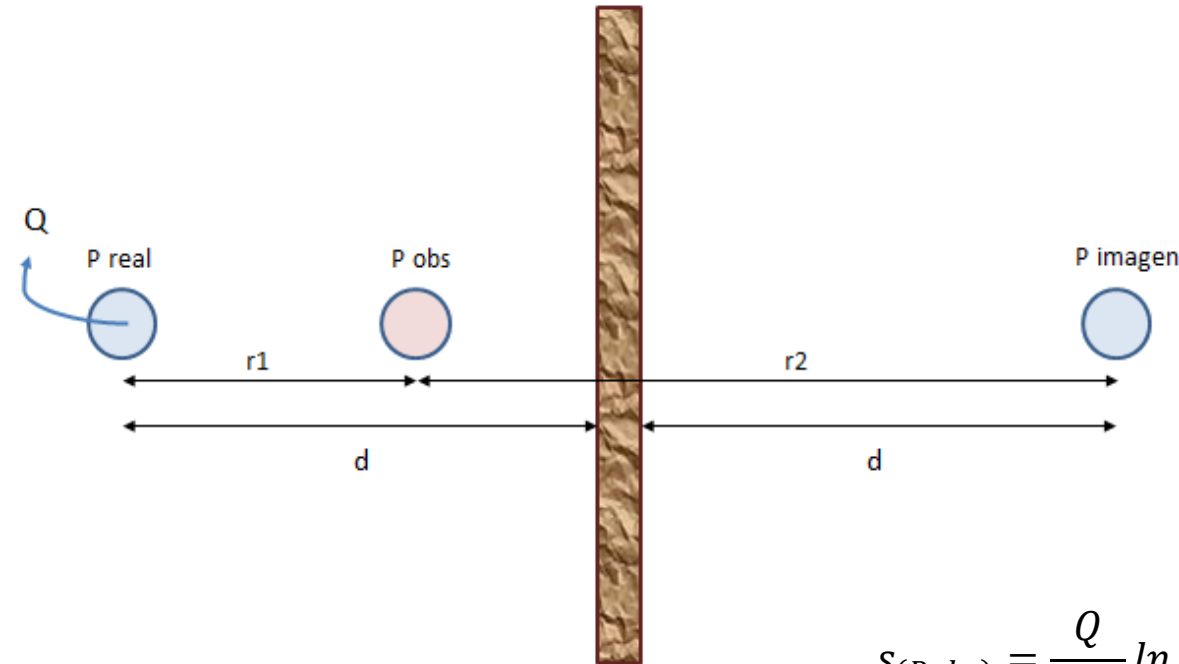
PROBLEMA REAL:



PROBLEMA IMAGEN:



# BARRERA NEGATIVA O BORDE IMPERMEABLE



Utilizamos la  
Aproximación de Jacob y  
la teoría de superposición:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \ln \left( \frac{2,25Tt}{r^2 S} \right)$$

$$S_{Pobs} = S_{(obs-real)} + S_{(obs-imagen)}$$

$$S_{(obs-real)} = \frac{Q}{4\pi T} \ln \left( \frac{2,25Tt}{r_1 r_1 S} \right)$$

$$S_{(obs-imagen)} = \frac{Q}{4\pi T} \ln \left( \frac{2,25Tt}{r_2 r_2 S} \right)$$

$$S_{(Pobs)} = \frac{Q}{4\pi T} \ln \left( \frac{2,25Tt}{r_1 r_1 S} \right) + \frac{Q}{4\pi T} \ln \left( \frac{2,25Tt}{r_2 r_2 S} \right)$$

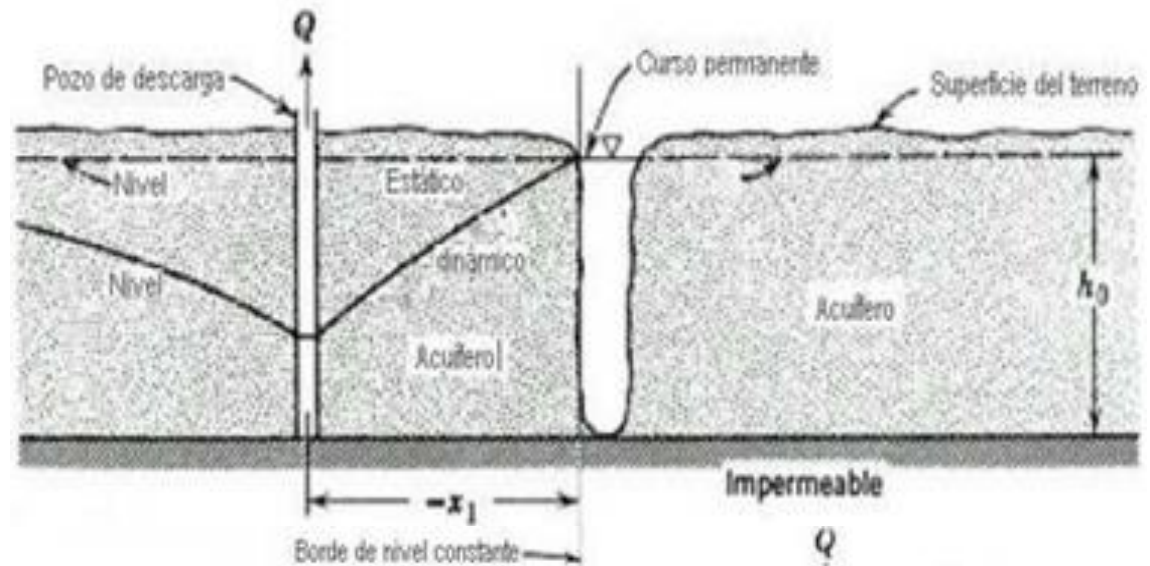
$$S_{(Pobs)} = \frac{Q}{4\pi T} \ln \left( \frac{2,25Tt}{r_1 r_2 S} \right)^2 = \frac{2Q}{4\pi T} \ln \left( \frac{2,25Tt}{r_1 r_2 S} \right)$$

$$S_{(Pobs)} = \frac{Q}{2\pi T} \ln \left( \frac{2,25Tt}{r_1 r_2 S} \right)$$

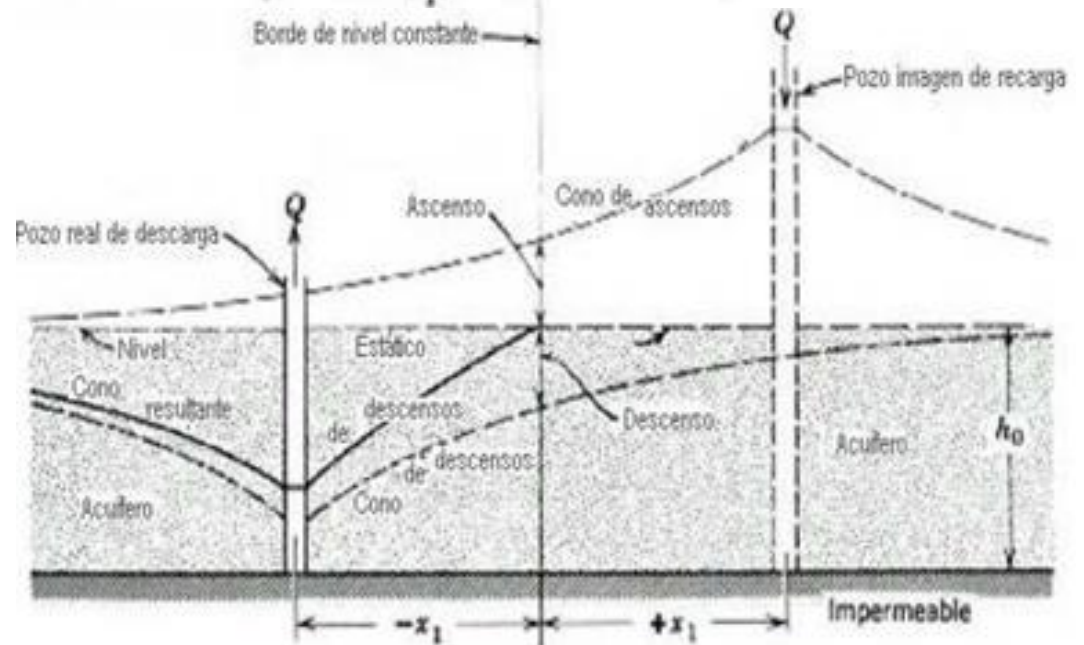


# BARRERA POSITIVA O BORDE CON CARGA CONSTANTE

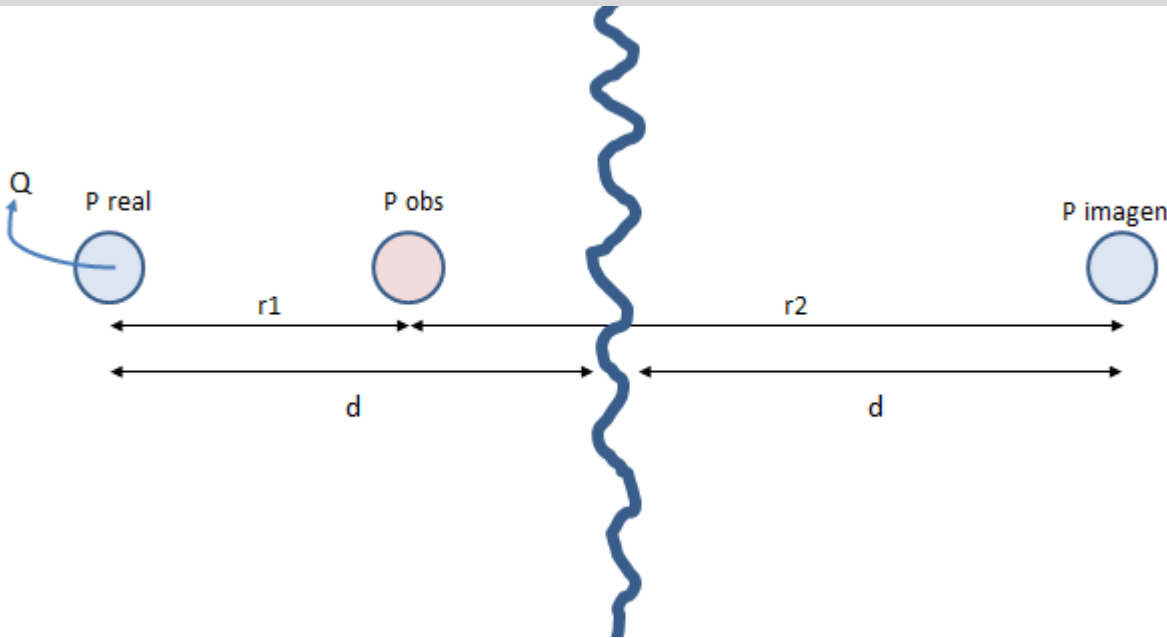
PROBLEMA REAL:



PROBLEMA IMAGEN:



# BARRERA POSITIVA O BORDE CON CARGA CONSTANTE



Utilizamos la Aproximación de Jacob y la teoría de superposición:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \ln \left( \frac{2,25Tt}{r^2 S} \right)$$

$$S_{Pobs} = S_{(obs-real)} + S_{(obs-imagen)}$$

$$S_{(obs-real)} = \frac{Q}{4\pi T} \ln \left( \frac{2,25Tt}{r_1 r_1 S} \right)$$

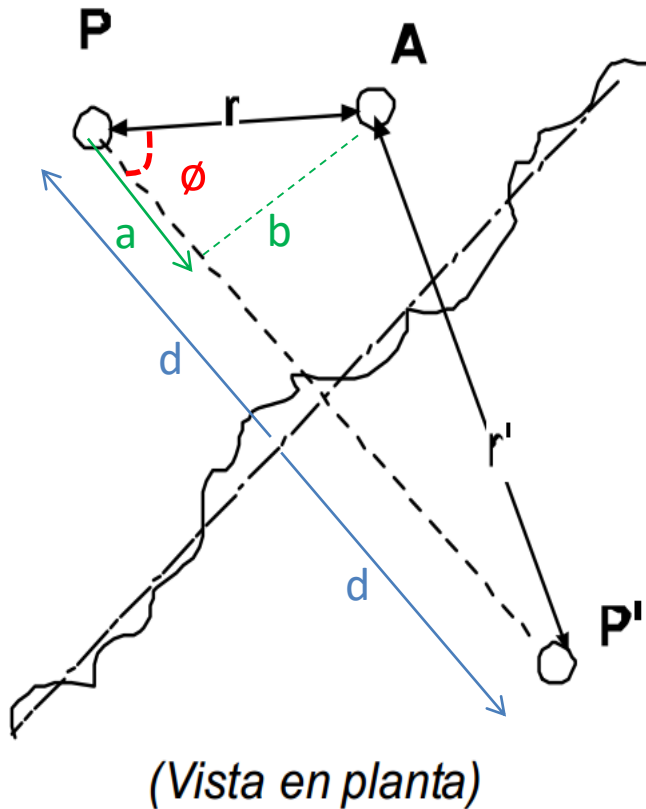
$$S_{(obs-imagen)} = \frac{-Q}{4\pi T} \ln \left( \frac{2,25Tt}{r_2 r_2 S} \right)$$

$$S_{(Pobs)} = \frac{Q}{4\pi T} \ln \left( \frac{2,25Tt}{r_1 r_1 S} \right) - \frac{Q}{4\pi T} \ln \left( \frac{2,25Tt}{r_2 r_2 S} \right)$$

$$S_{(Pobs)} = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{\frac{2,25Tt}{r_1 r_1 S}}{\frac{2,25Tt}{r_2 r_2 S}} = \frac{Q}{4\pi T} \ln \left[ \frac{r_2}{r_1} \right]^2 = \frac{Q}{2\pi T} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)$$

$$S_{(Pobs)} = \frac{Q}{2\pi T} \ln \left( \frac{r_2}{r_1} \right)$$

# BARRERA POSITIVA O BORDE CON CARGA CONSTANTE



Conocemos  $d$ ,  $r$  y  $\phi$  pero no conocemos  $r'$ :

Problema simple de trigonometría

$$a = r \cos \phi$$

$$b = r \sin \phi$$

$$r' = \sqrt{b^2 - (2d - a)^2}$$

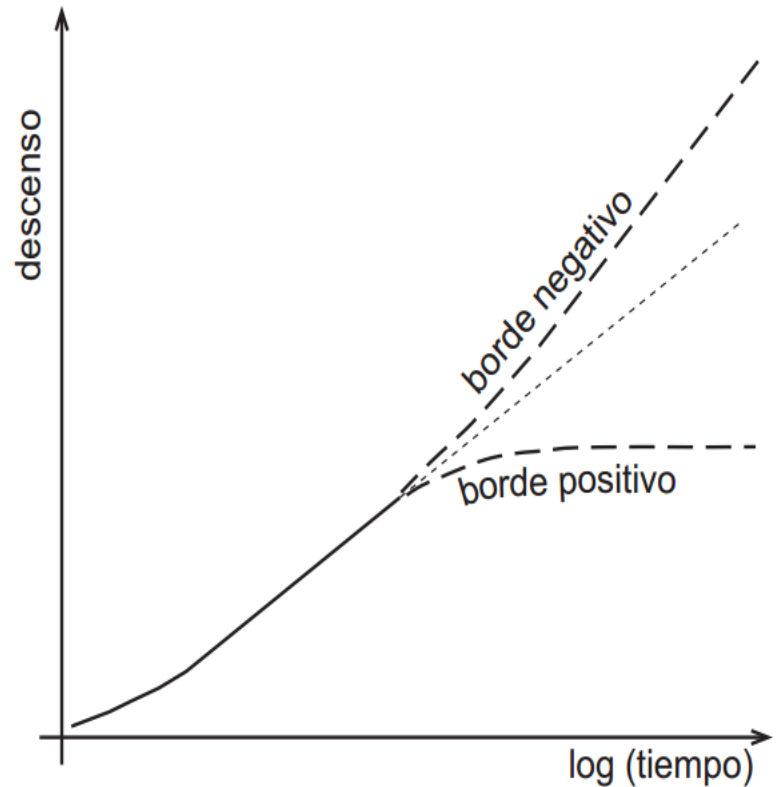
$$S_{(A)} = S_P - S_{P'} = \frac{Q}{4\pi T} \ln \left( \frac{2,25Tt}{rrS} \right) - \frac{Q}{4\pi T} \ln \left( \frac{2,25Tt}{r'r'S} \right) = \frac{Q}{2\pi T} \ln \left( \frac{r'}{r} \right)$$

# Barreras en las curvas $s(t)$

Los descensos se comportan como si el acuífero fuera indefinido hasta que el cono alcanza el borde, es el tramo continuo (recta de Jacob).

Cuando el cono toca el borde, si es negativo, aumenta la pendiente de la recta, como si la transmisividad del acuífero hubiera disminuido.

Si el borde es positivo, la línea llega a hacerse horizontal (régimen permanente)



# EJERCICIO DE EXAMEN

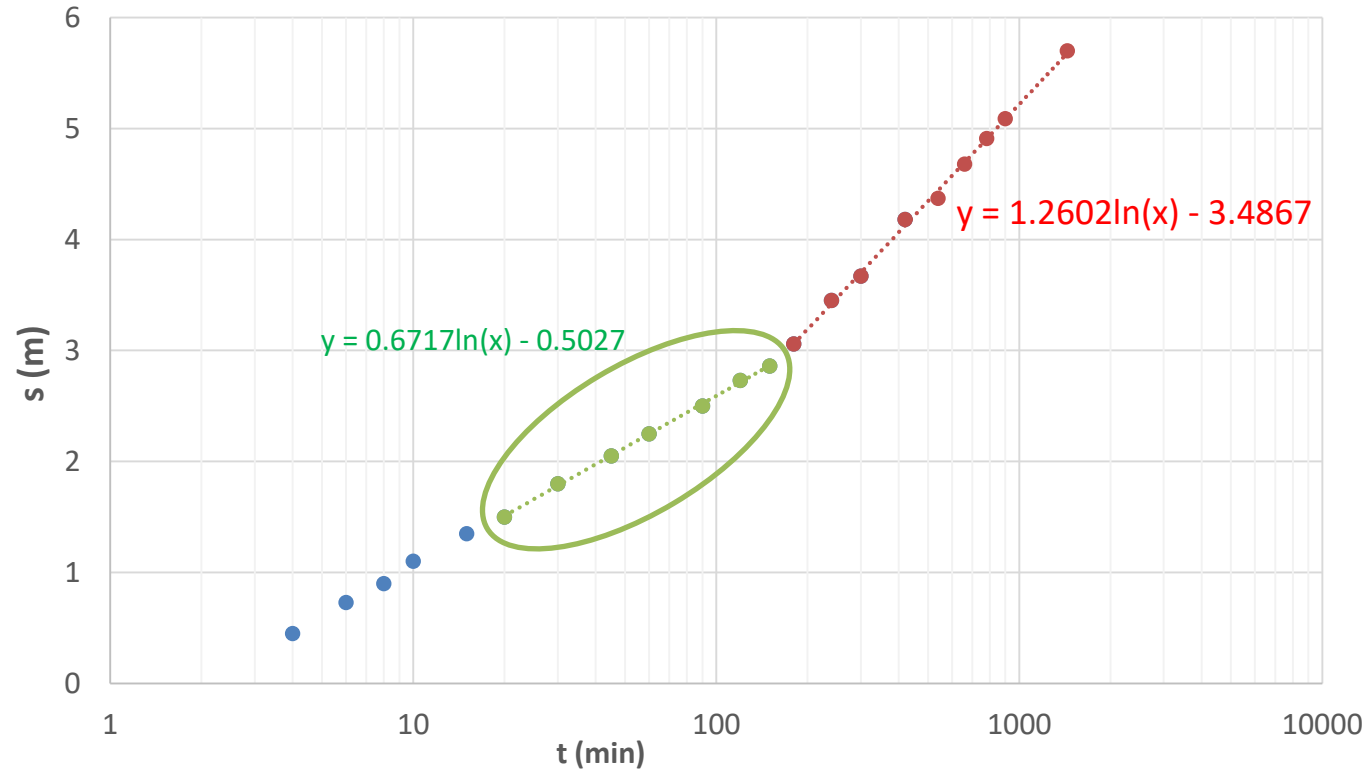
t (min)	s (m)	t (min)	s (m)
4	0.45	150	2.86
6	0.73	180	3.06
8	0.90	240	3.45
10	1.10	300	3.67
15	1.35	420	4.18
20	1.50	540	4.37
30	1.80	660	4.68
45	2.05	780	4.91
60	2.25	900	5.09
90	2.50	140	5.36
120	2.73	1440	5.70

La tabla precedente muestra los resultados de un ensayo de bombeo de un día en un acuífero cautivo. El caudal extraído fue  $234 \text{ m}^3/\text{h}$  y las medidas se efectuaron en un pozo a 50 metros de distancia, interfiriendo un borde impermeable.

Determinar los parámetros hidrogeológicos y la distancia entre el pozo imagen y el pozo de observación.

# EJERCICIO DE EXAMEN

t (min)	s (m)
4	0.45
6	0.73
8	0.9
10	1.1
15	1.35
20	1.5
30	1.8
45	2.05
60	2.25
90	2.5
120	2.73
150	2.86
180	3.06
240	3.45
300	3.67
420	4.18
540	4.37
660	4.68
780	4.91
900	5.09
1440	5.7



$$s = \frac{Q}{4\pi T} \ln\left(\frac{2,25Tt}{r^2 S}\right) \rightarrow s = \frac{Q}{4\pi T} \ln(t) + \frac{Q}{4\pi T} \ln\left(\frac{2,25T}{r^2 S}\right)$$

r(m)	50
Q(l/s)	65
a	0.6717
b	-0.5027

$$T = \frac{Q}{4\pi a} = 665 \text{ m}^2/\text{d}$$

$$S = \frac{2,25 \cdot T}{r^2 e^{\left(\frac{4\pi T b}{Q}\right)}} = 8.8 \times 10^{-4}$$

Pumping Test Wizard--Step 3 (Aquifer Data)



**Aquifer Data**

**Aquifer Saturated Thickness**

b:  m

Unconfined Aquifers: Measure b from confining unit at aquifer base to the static water level.

Confined Aquifers: Measure b from confining unit at aquifer base to confining unit at aquifer top.

**Hydraulic Conductivity Anisotropy Ratio**

Kv/Kh:

Pumping Test Wizard--Step 4 (PW Data)



**Well Coordinate System**

**Well Name**

Name:

**Well Coordinates**

X:  m

Y:  m

Pumping Test Wizard--Step 5 (PW Construction)



Measure depths d, z and zh from unit top or water table (not from land surface).

**Well Configuration**

d:  m

L:  m

z:  m

zh:  m

Lh:  m

Unit:

Pumping Test Wizard--Step 6 (PW Radius)



r(c):  m

r(eq):  m

r(p):  m

r(w):  m

r(sk):  m

r(c) = inside radius of well casing

r(eq) = radius of downhole equipment

r(p) = inside radius of packer

r(w) = radius of well (open or perforated interval)

r(sk) = outer radius of well skin (disturbed zone enveloping filter pack)

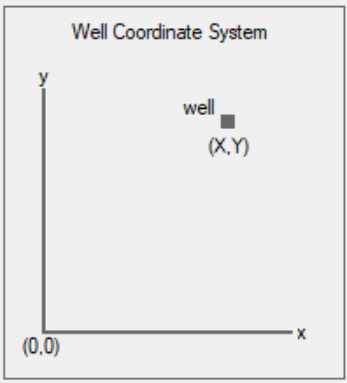
Pumping Test Wizard--Step 7 (PW Rate Data)

Per. No.	Time (min)	Rate (m <sup>3</sup> /min)
1	0	3.9

- Insert Row    Delete
- Add Rows...    Copy
- Select All    Paste
- Import...    Search...
- Filters...    Math...

< Atrás    Siguiente >    Cancelar    Ayuda

Pumping Test Wizard--Step 8 (OW Data)

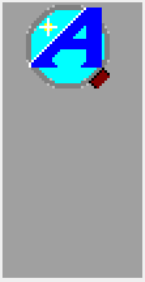


Well Name  
Name: PO

Well Coordinates  
X: 0 m  
Y: 50 m

< Atrás    Siguiente >    Cancelar    Ayuda

Observation Data Import Wizard - Step 1 of 3



Use this wizard to import observation data from a text file.

File types supported include the following:

- generic comma and blank delimited files
- many types of transducer files (e.g., In-Situ)

Enter the name of a file to import:

Import file: desktop\ej\_clase\_barreras.csv    Browse...

Append observations from import

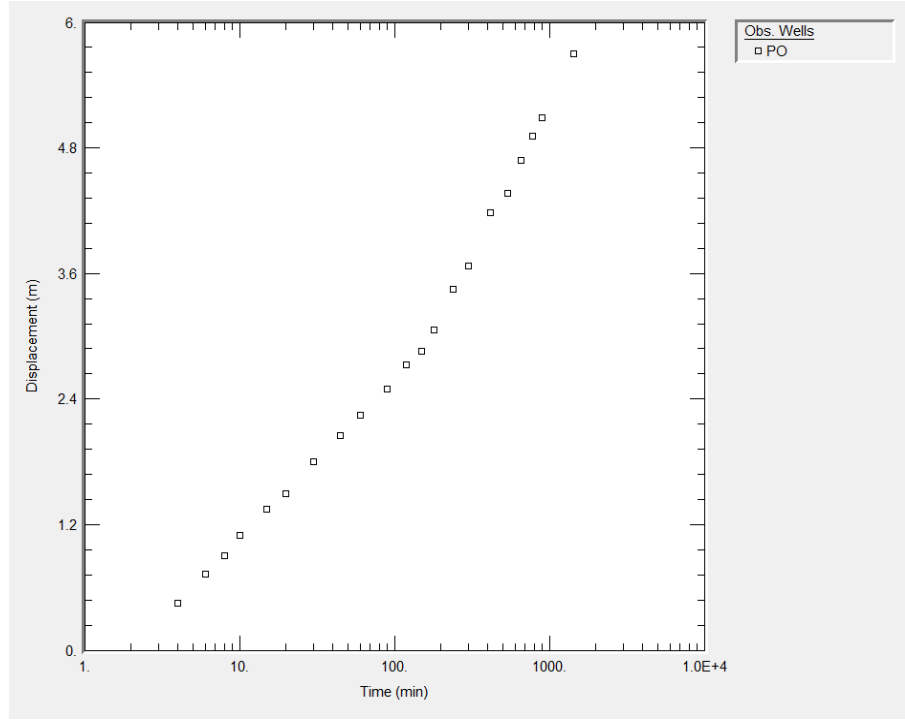
< Atrás    Siguiente >

View Import File

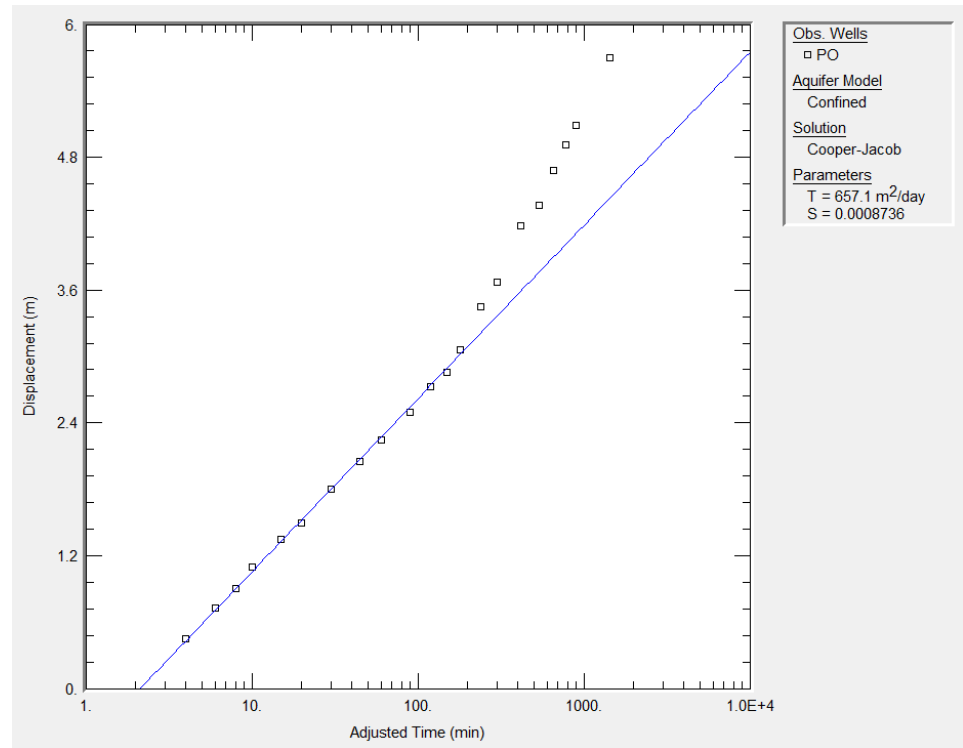
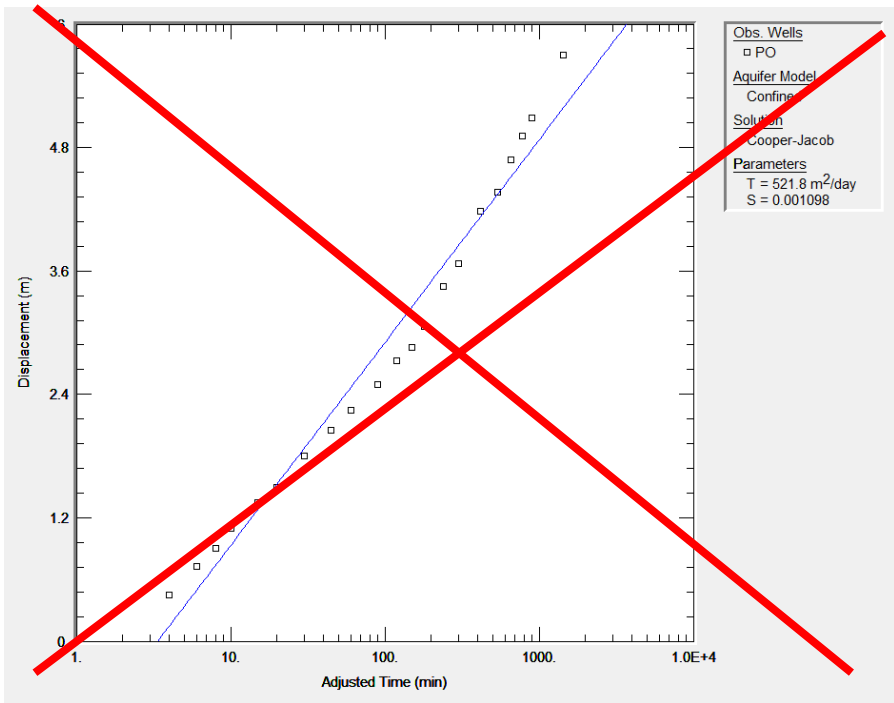
File
4: 0.45
6: 0.73
8: 0.9
10: 1.1
15: 1.35
20: 1.5
30: 1.8
45: 2.05
60: 2.25
90: 2.5
120: 2.73
150: 2.86
180: 3.06
240: 3.45
300: 3.67
420: 4.10

Starting Row: 1

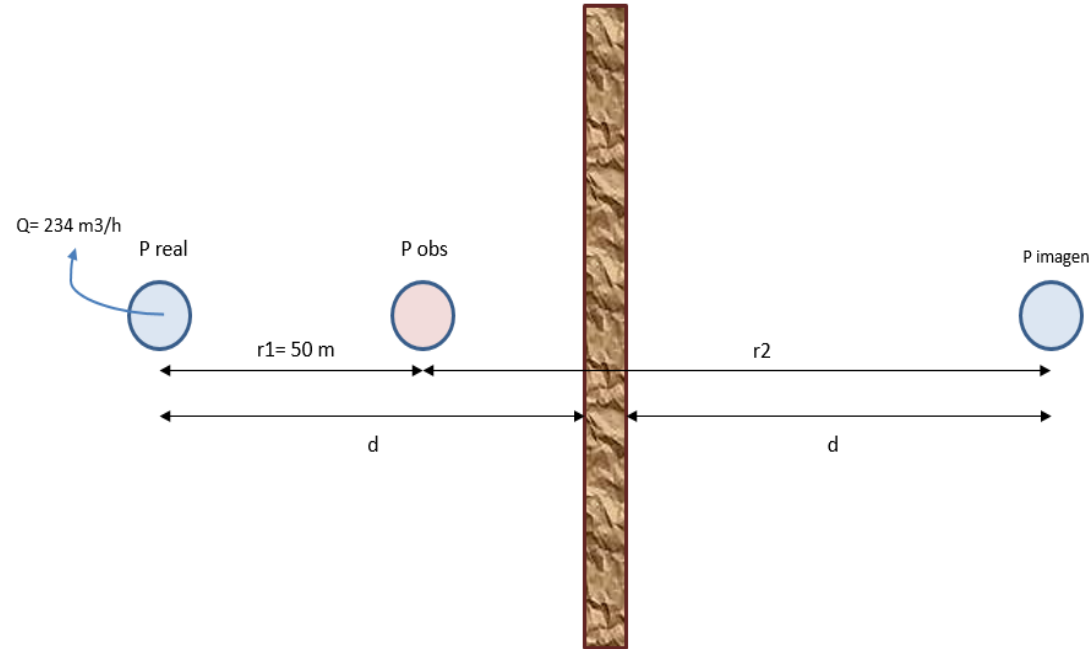
Aceptar    Cancelar    Ayuda







# EJERCICIO DE EXAMEN



$r_1$ (m)	50
$Q$ (l/s)	65
$a'$	1.26
$b'$	-3.487
$Q$ (m <sup>3</sup> /min)	3.9
$T$ (m <sup>2</sup> /min)	0.46
$T$ (m <sup>2</sup> /dia)	665
$S$	8.79E-04

$t_i$ (min)	$s_i$ (m)	$r_2$ (m)	$d$ (m)
180	3.06	436.5	243.2
240	3.45	435.4	242.7
300	3.67	462.0	256.0
420	4.18	442.5	246.2
540	4.37	493.9	271.9
660	4.68	479.2	264.6
780	4.91	477.2	263.6
900	5.09	481.6	265.8
1440	5.7	489.3	269.7
<b>promedio</b>		<b>466.4</b>	<b>258.2</b>

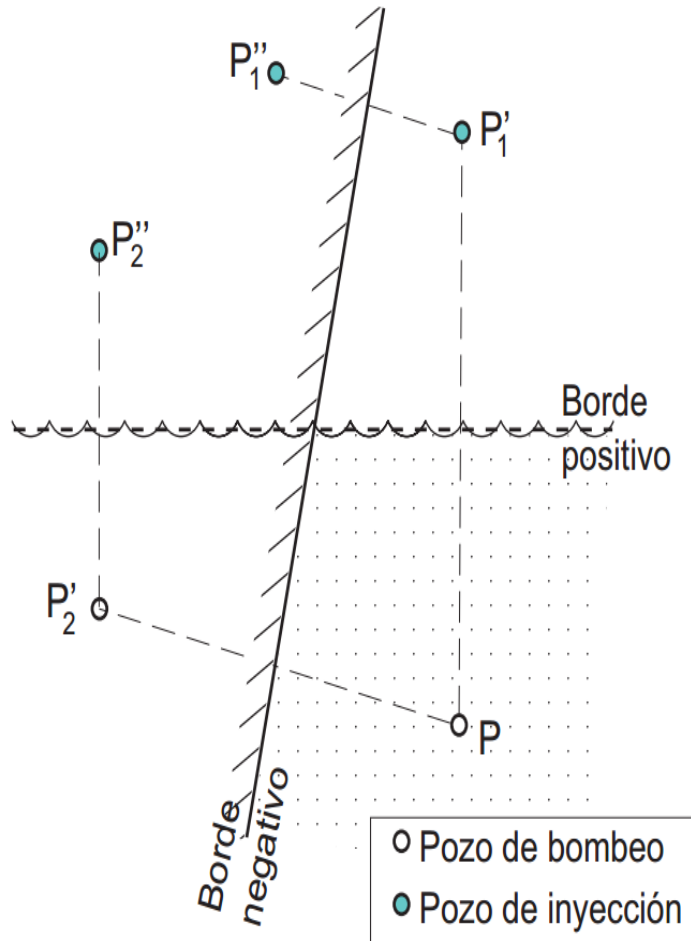
$$s = \frac{Q}{2\pi T} \ln \left( \frac{2,25 T t}{r_1 r_2 S} \right)$$

$$r_1 = 50$$

$$2d = r_1 + r_2$$

$$r_2 = \frac{2,25 \cdot T \cdot t_i}{50 \cdot S \cdot \exp \left( \frac{2\pi T s_i}{Q} \right)}$$

# VARIAS BARRERAS



$P$  = pozo real

$P'_1$  = Pozo imagen de  $P$  reflejado en el borde positivo

$P'_2$  = Pozo imagen de  $P$  reflejado en el borde negativo

$P''_1$  = Pozo imagen de  $P'_1$  reflejado en el borde negativo

$P''_2$  = Pozo imagen de  $P'_2$  reflejado en el borde positivo

Quando existe más de una barrera, el problema se resuelve agregando más pozos imagen. Cada pozo imagen agregará un descenso/ascenso extra pero más pequeño que el producido por el pozo imagen anterior.

# VARIAS BARRERAS

## REGLAS GENERALES

La imagen de un pozo (real o imagen) respecto a una barrera impermeable tendrá el mismo signo que dicho pozo.

La imagen de un pozo (real o imagen) respecto a una barrera permeable tendrá el signo opuesto que dicho pozo.

La cantidad de los pozos imagen que se deben colocar dependerá del ángulo que formen las barreras entre sí.

Estudiaremos problemas de 2 barreras y distinguiremos 3 casos: barreras que forman un ángulo agudo entre sí, barreras perpendiculares entre sí y barreras paralelas.

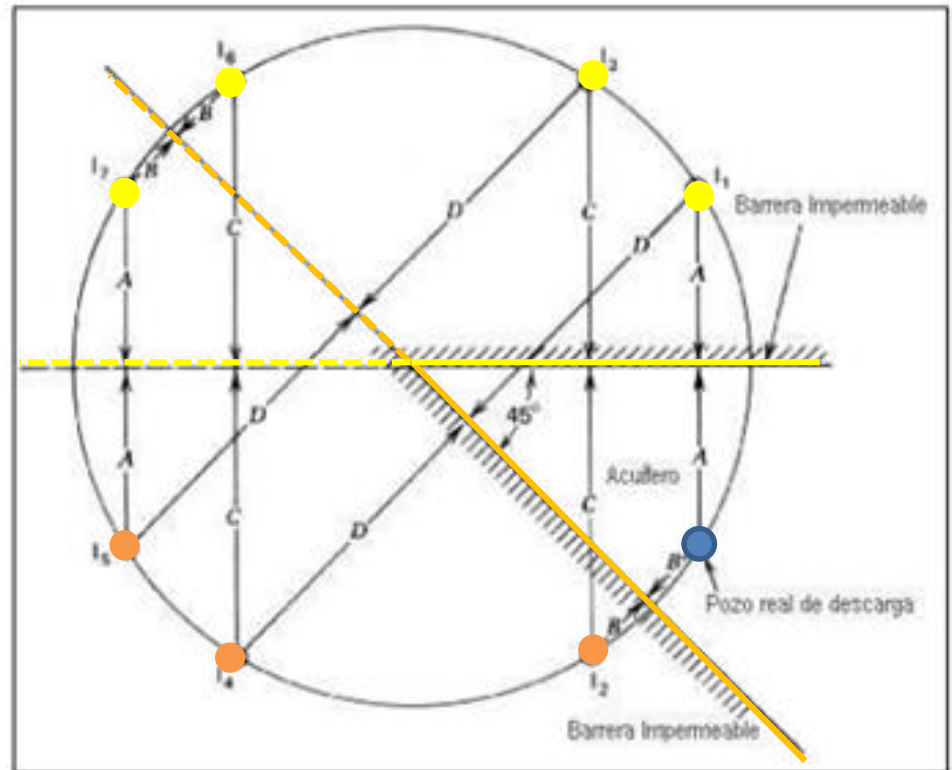
# BARRERAS NO PARALELAS

Para barreras no paralelas, el nº de pozos imagen es finito, y en general se cumple:

$$n = \frac{360^\circ}{\theta} - 1$$

$\theta$  = ángulo (°) formado por la cuña de acuífero

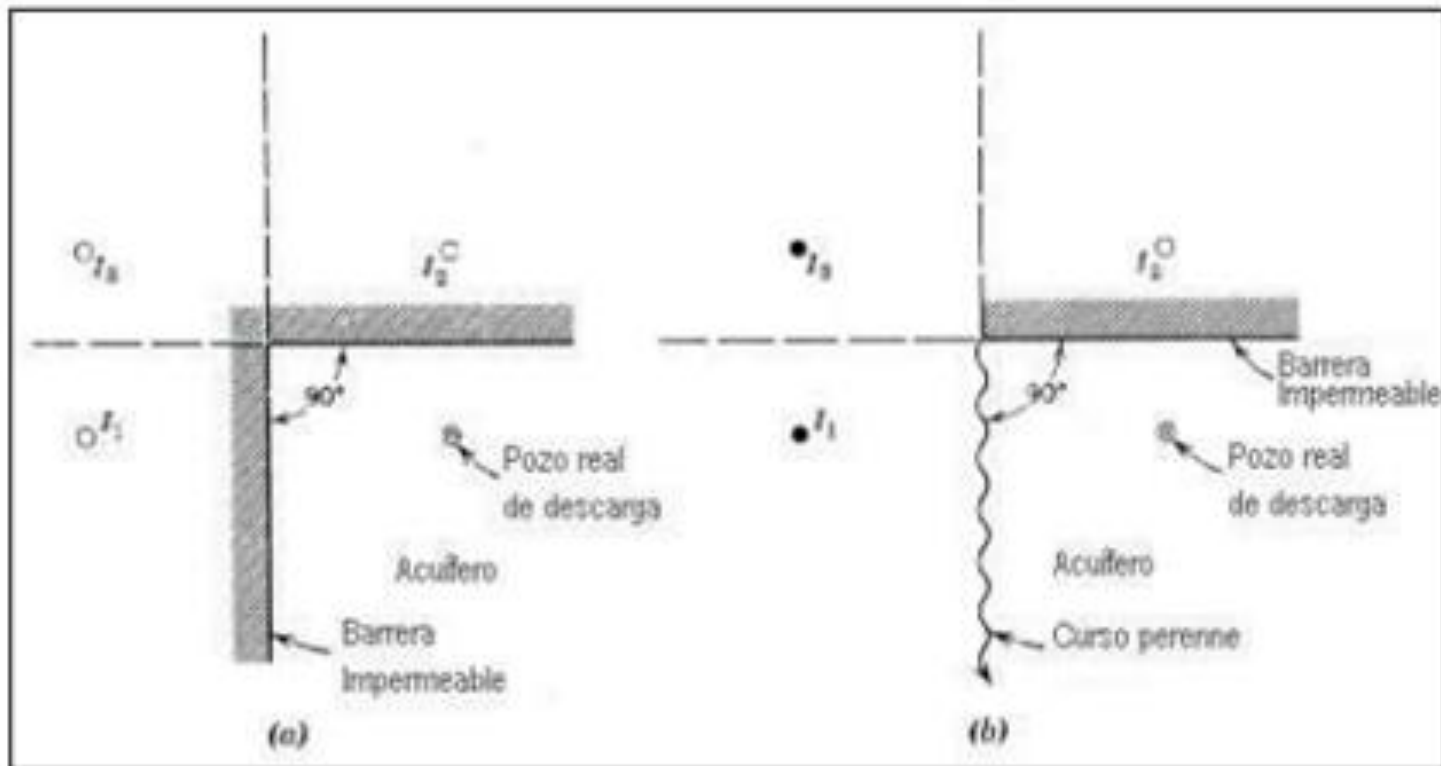
Todos los pozos imagen se sitúan sobre una circunferencia con centro en el vértice de la cuña de acuífero y pasa por el pozo real.



# BARRERAS NO PARALELAS

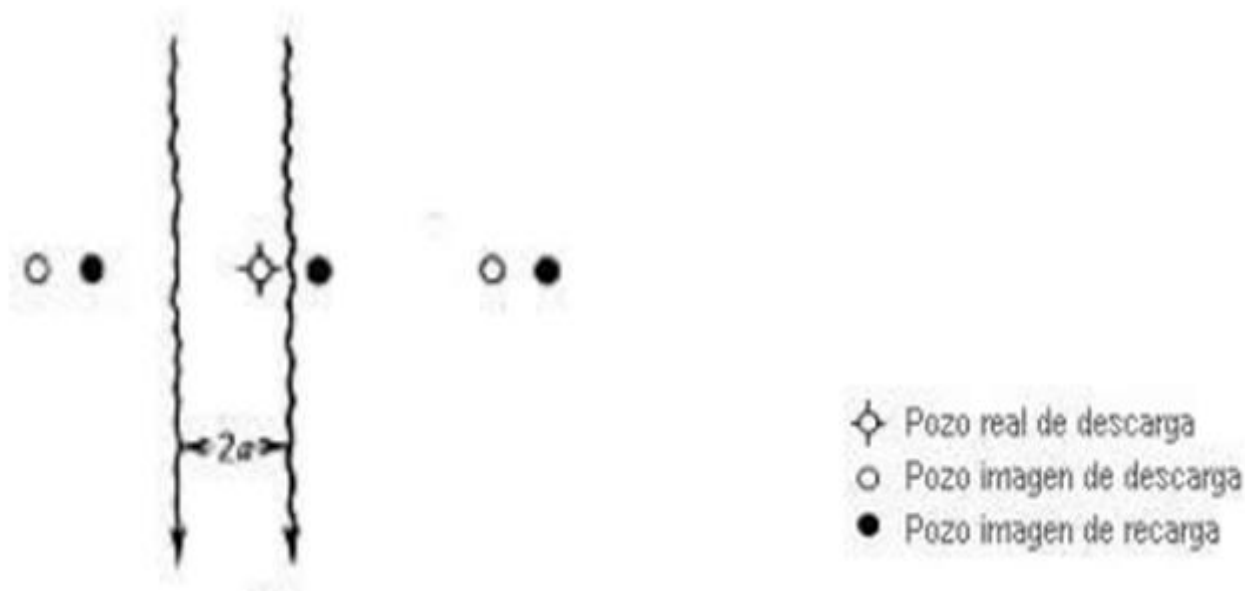
Barreras perpendiculares entre sí: caso particular

$$n = (360/90) - 1 = 3 \text{ pozos imagen}$$



# BARRERAS PARALELAS

Barreras paralelas entre sí: los pozos imagen son infinitos, se debe terminar de colocar imágenes cuando los descensos/ascensos que produzcan ya sean despreciables. Los pozos más alejados ya no generaran efectos apreciables en la suma de efectos.



# EJERCICIO

Determinar el número de pozos imagen para resolver los problemas i) y ii) y la ubicación esquemática de los mismos para cada caso. Indicar si los pozos imagen son de inyección o extracción.

i) 2 barreras positivas que forman  $90^\circ$  entre sí. El pozo real se ubica entre ambas barreras.

ii) una barrera positiva y otra barrera negativa paralelas entre sí. El pozo real se ubica entre ambas barreras.

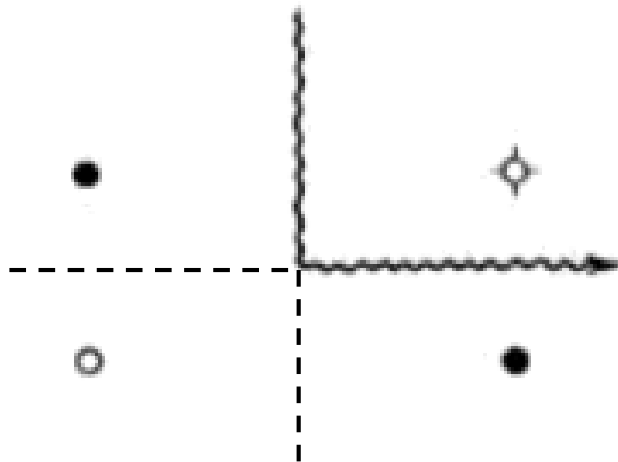


# EJERCICIO

i) 2 barreras positivas que forman  $90^\circ$  entre sí. El pozo real se ubica entre ambas barreras.

RESPUESTA:

- ⊛ Pozo real de descarga
- Pozo imagen de descarga
- Pozo imagen de recarga



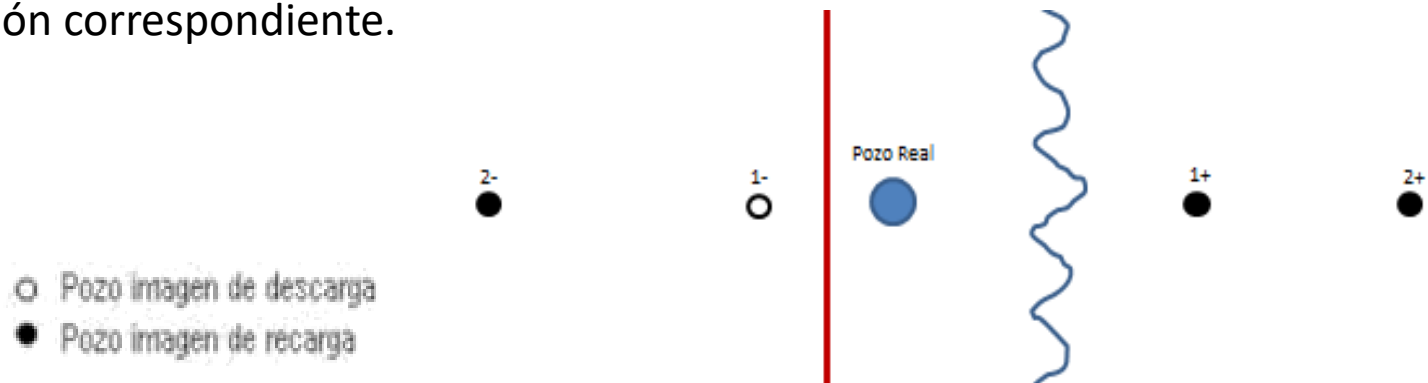
# EJERCICIO

ii) una barrera positiva y otra barrera negativa paralelas entre sí. El pozo real se ubica entre ambas barreras.

RESPUESTA:

En este caso los pozos imagen se extenderán infinitamente a la izquierda y la derecha pero para simplificar el problema, se deben evaluar los descensos en cada pozo imagen y cuando estos sean muy pequeños y ya no afecten a la suma total de descensos (ley de superposición) entonces ya no será necesario seguir extendiendo los mismos.

Los pozos imagen que se ubiquen según la barrera positiva serán de recarga y aquellos que se ubiquen según la negativa serán de extracción, en consecuencia esto afectará los signos de los descensos en la ecuación de superposición correspondiente.



¡Muchas Gracias por su atención!

¿Preguntas?

