Optimización bajo Incertidumbre

Prueba final - 07/06/2022

1. (15 p) Dada la optimización bajo incertidumbre:

   a) describir el esquema de decisiones bajo incertidumbre según etapas.

   b) indicar que ventajas y desventajas tiene el esquema de decisiones bajo incertidumbre con respecto a un esquema determinista en el que no se modela la incertidumbre.

2. (25 p) Dado el problema determinista de producción agrícola (cap. Introducción del teórico). Se tiene el conjunto de cultivos de trigo, maíz y remolacha, $C = \{T, M, R\}$. La superficie de tierra dedicada a los cultivos se establece según variables x_T, x_M y x_R. Las cantidades vendidas y compradas de trigo y maíz se establecen según variables y_T^v, y_T^c y y_M^v, y_M^c, respectivamente; y las cantidades de remolacha vendida a precios favorable y bajo según variables y_R^f, y_R^v. Se modela mediante la formulación

$$
\begin{array}{ll}
\min & 150x_T + 230x_M + 260x_R \\
 & +238y_T^c - 170y_T^v + 210y_M^c - 150y_M^v - 36y_R^f - 10y_R^v \\
\text{s.a} & x_T + x_M + x_R \leq 500, \\
 & 2,5x_T + y_T^c - y_T^v \geq 200, \\
 & 3x_M + y_M^c - y_M^v \geq 240, \\
 & 20x_R - y_R^f - y_R^v \geq 0, \\
 & y_R^f \leq 6000, \\
 & x_T, x_M, x_R, y_T^v, y_T^c, y_M^v, y_M^c, y_R^f, y_R^v \geq 0.
\end{array}
$$

   Se plantea una variante estocástica de dos etapas del problema, donde las decisiones de dedicación de tierra se toman previamente a la realización de los redimientos inciertos, y las decisiones de compras y ventas se toman posteriormente. El rendimiento de cada cultivo depende de dos eventos equiprobables e **independientes** de los otros cultivos, a saber *alto* y *bajo*. Estos eventos determinan retornos asociados de 20 % mayor al retorno determinista para el evento alto y de 20 % menor al retorno determinista para el evento bajo. Se requiere

   a) A partir de los eventos, plantear los escenarios que representarían la incertidumbre de la variante y sus probabilidades asociadas. Definir el parámetro que establezca los retornos de los cultivos en función de los escenarios planteados (no se requiere calcular sus valores).

   b) Formular la variante del problema representando la función de recurso y el subproblema de segunda etapa en función paramétrica de los escenarios y los retornos descriptos en el apartado anterior.

3. (35 p) Dado el problema

$$\min_{x\geq 0} 2x + \mathbb{E}_{\xi(\omega)}\{5y(\omega) \,|\, \xi(\omega)y(\omega) \geq 1 - x, y(\omega) \geq 0\},$$

donde el parámetro aleatorio $\xi(\omega)$ puede tomar los valores $\xi(1) = 1$ con probabilidad $p(1) = 2/5$ y $\xi(2) = 5$ con probabilidad $p(2) = 3/5$. Se require

a) obtener el valor óptimo de la solución "esperar y ver", WS;

b) obtener el valor óptimo del problema con recurso, RP;

c) obtener el resultado esperado de aplicar la solución de valor esperado, EEV;

d) calcular el valor esperado de la información perfecta, $EVPI$, y el valor de la solución estocástica, VSS.

4. (25 p) Sea un problema de localización de instalaciones para brindar un servicio de cobertura a usuarios. En el que se tiene el conjunto I de posibles localizaciones, donde x_i indica si se abre o no el servicio en la localización $i \in I$ a costo f_i. Además, se tiene el conjunto J de usuarios, donde y_{ij} indica si se brinda el servicio al usuario $j \in J$ desde la localización $i \in I$ a costo c_{ij}. El problema determinista de minimizar los costos de localización de instalaciones y cobertura de usuarios es

$$\begin{array}{ll} \text{min} & \sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{i\in I, j\in J} c_{ij} y_{ij} \\ \text{s.a} & \sum_{i\in I} y_{ij} \geq 1, \quad j \in J, \\ & y_{ij} \leq x_i, \quad i \in I, j \in J, \\ & x_i, y_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, j \in J. \end{array}$$

Se requiere formular las siguientes variantes estócasticas del problema.

a) El costo de brindar el servicio al usuario i en la localización j depende de un evento aleatorio $\omega \in \Omega$ (finito), con probabilidad $\pi(\omega)$, por lo que el costo pasa a denotarse $c_{ij}(\omega)$. Formular la variante que además minimice la esperanza de los costos.

b) Se extiende la variante del apartado a) agregando que las decisiones de atender los usuarios desde las localizaciones también dependan del evento aleatorio $\omega \in \Omega$ (finito), pasando a denotarse $y_{ij}(\omega)$. Formular esta variante.

5. (*) (30 p) [(*) Problema solo requerido para estudiantes de posgrado.]

Dado el problema de segunda etapa

$$\begin{array}{lll} Q(x,\xi) = & \min_y & 5y_1 - 3y_2 \\ & \text{s.a} & y_1 - y_2 \geq 4 - \xi x, \\ & & y_1, y_2 \geq 0, \end{array}$$

donde ξ es distribuida uniforme en $[2,3]$ y $x \geq 0$.

a) Dado que en la solución optima, y^*, se cumple la condición $y_1^* = \max\{0, 4 - \xi x\}$, determinar la condición correspondiente para y_2^*.

b) Deducir la expresión analítica de $\mathbb{E}_\xi Q(x,\xi)$.