Introducción a la Teoría de la Información

Introducción a la Transformada de Fourier

Facultad de Ingeniería, UdelaR

Año 2023

Finalidad de esta parte del curso

Vincular mundos digital y analógico. Introducir tiempo y potencia.
CONCEPTOS DE MUESTREO Y ANCHO DE BANDA

Finalidad de esta parte del curso

Vincular mundos digital y analógico. Introducir tiempo y potencia.
CONCEPTOS DE MUESTREO Y ANCHO DE BANDA

Tratar con señales continuas. Pasar de continuo a discreto y viceversa.

- Continuas en el tiempo
- Continuas en los valores que pueden tomar

Finalidad de esta parte del curso

Vincular mundos digital y analógico. Introducir tiempo y potencia.
CONCEPTOS DE MUESTREO Y ANCHO DE BANDA

Tratar con señales continuas. Pasar de continuo a discreto y viceversa.

- Continuas en el tiempo
- Continuas en los valores que pueden tomar

- Discretizar en el tiempo es *muestrear*. En ciertas condiciones es un proceso reversible.
- Discretizar los valores es *cuantificar*. No es reversible; se puede decir que introduce ruido, pero es ruido controlado.

Finalidad de esta parte del curso

Vincular mundos digital y analógico. Introducir tiempo y potencia.
CONCEPTOS DE MUESTREO Y ANCHO DE BANDA

Tratar con señales continuas. Pasar de continuo a discreto y viceversa.

- Continuas en el tiempo
- Continuas en los valores que pueden tomar

- Discretizar en el tiempo es *muestrear*. En ciertas condiciones es un proceso reversible.
- Discretizar los valores es *cuantificar*. No es reversible; se puede decir que introduce ruido, pero es ruido controlado.

Si bien tienen infinitos valores, se puede establecer una *dimensionalidad*, que se relaciona con su *ancho de banda*.

Finalidad de esta parte del curso

Vincular mundos digital y analógico. Introducir tiempo y potencia.
CONCEPTOS DE MUESTREO Y ANCHO DE BANDA

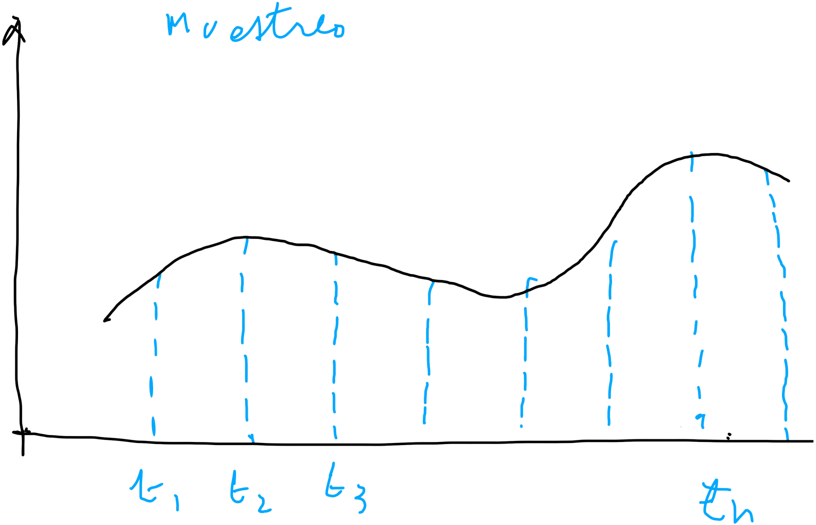
Tratar con señales continuas. Pasar de continuo a discreto y viceversa.

- Continuas en el tiempo
- Continuas en los valores que pueden tomar

- Discretizar en el tiempo es *muestrear*. En ciertas condiciones es un proceso reversible.
- Discretizar los valores es *cuantificar*. No es reversible; se puede decir que introduce ruido, pero es ruido controlado.

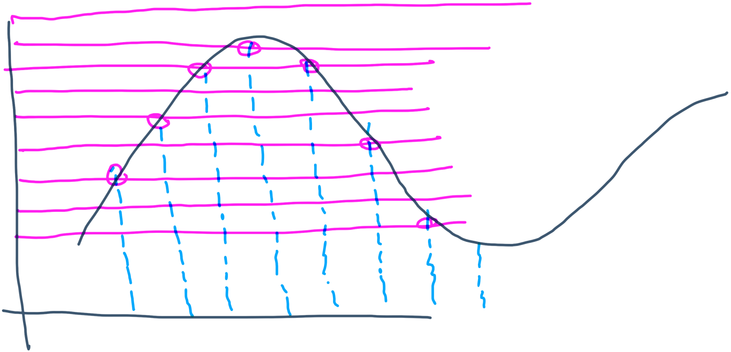
Si bien tienen infinitos valores, se puede establecer una *dimensionalidad*, que se relaciona con su *ancho de banda*.

Varios libros de referencia, por ejemplo: Communication Systems, A. Bruce Carlson.

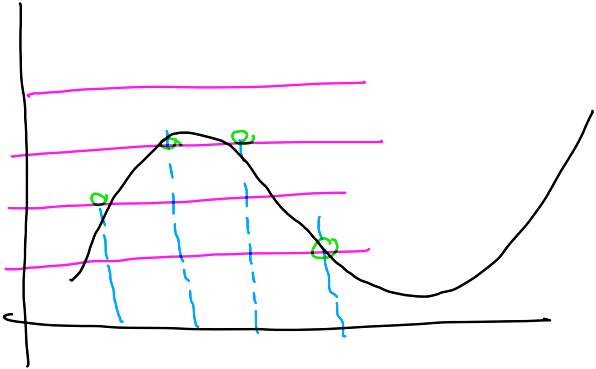


$$X_i \in R$$

cuantificación



Detalle



Conceptos de ancho de banda, dualidad tiempo frecuencia, muestreo

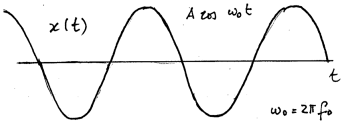
- Relacionar velocidad de variación con frecuencias
- Dominio del tiempo y de las frecuencias
- Bases de funciones ortonormales: sinusoides, exponenciales complejas, sinc o senoC
- Muestreo de señales
- Muestreo suficiente

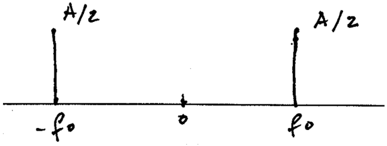
Señales sinusoidales

$$x(t) = A.cos(2\pi f_0 t) = A.\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$$

con

$$\begin{cases} 2\pi f_0 = \omega_0, \text{ frecuencia angular} \\ \dfrac{1}{f_0} = T_0, \text{ período de la señal} \end{cases}$$





Potencia

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{A^2}{2}$$

Señales periódicas y series de Fourier

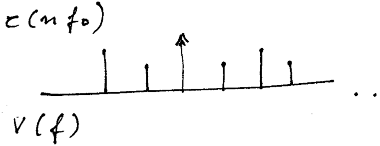
- $v(t)$ periódica de período T_0 si para n entero, $v(t \pm nT_0) = v(t)$
- Expansión en serie de Fourier

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} c(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t} \\
v(t) &= \sum_{0}^{+\infty} (a(nf_0) cos(2\pi n f_0 t) + b(nf_0) sen(2\pi n f_0 t))
\end{aligned}
$$

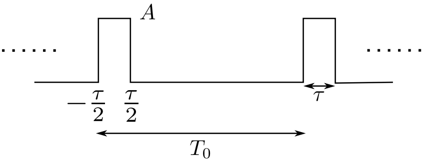
- Líneas espectrales. Armónicos.

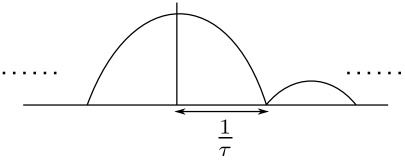
Fórmulas directa e inversa

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} c(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t} \\
c(nf_0) &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt
\end{aligned}
$$



Ejemplo: señal periódica. Tren de pulsos





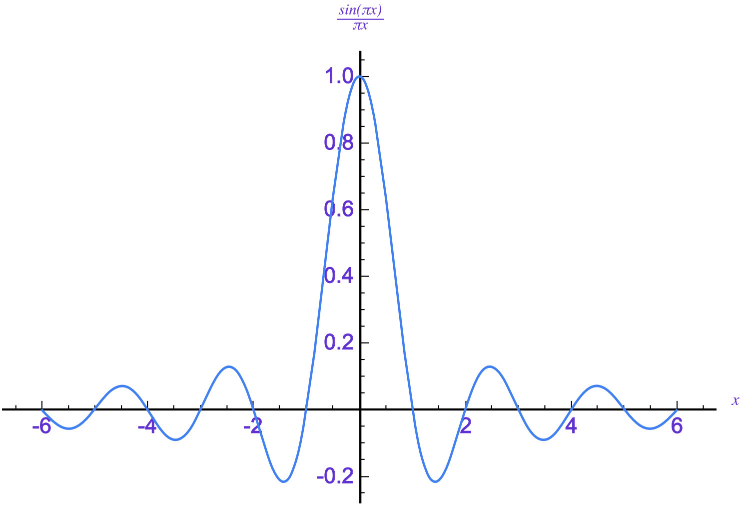
$$
\begin{aligned}
c(nf_0) &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t).e^{-j2\pi n f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A.e^{-j2\pi n f_0 t} \\
&= \frac{A}{\pi n f_0} sen(\pi n f_0 \tau) = A\tau sinc(n f_0 \tau)
\end{aligned}
$$

- Observar el valor de continua $\frac{A\tau}{T_0}$
- Líneas espectrales cada f_0 de amplitud dada por una función $sinc(x) = \frac{sen \pi x}{\pi x}$

Función $sinc$

$sinc(x) = \frac{sen \pi x}{\pi x}$

Vale 0 en los enteros y vale 1 en 0.



Líneas espectrales y Teorema de Parseval

Líneas espectrales

- En los múltiplos de f_0
- Si $v(t)$ es real, $c(-nf_0) = c^*(nf_0)$

Teorema (de la potencia o de Parseval)

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |v(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t).v^*(t)dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t).\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} c^*(nf_0)e^{-j2\pi nf_0 t}\right] dt \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} c^*(nf_0)\left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t).e^{-j2\pi nf_0 t}dt\right] \\
&= \sum_{-\infty}^{+\infty} c^*(nf_0).c(nf_0) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c(nf_0)|^2
\end{aligned}$$

Señales no periódicas y transformada de Fourier

Aproximaciones o modelos: no hay señales periódicas ni anchos de banda netamente limitados

$v(t)$ ahora señal limitada en energía, $E = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt$
Por ejemplo podría estar limitada en tiempo.

- Transformada:

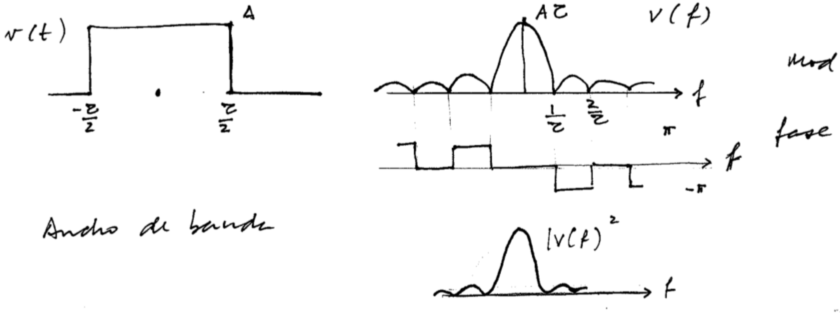
$$V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- Inversa:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(f) e^{j2\pi f t} df$$

$V(f)$ en general compleja. Si $v(t)$ real, $V(-f) = V^*(f)$
Módulo par y argumento impar.

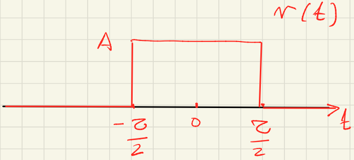
Ejemplo: pulso rectangular



Teorema (de la energía)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t).w^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} V(f).W^*(f)df$$

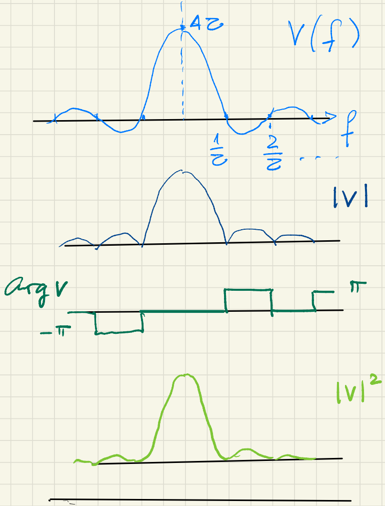
Ejemplo: pulso rectangular 2



$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\tau/2} A \; e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= A\tau \;\, \mathrm{sinc}\; f\tau$$

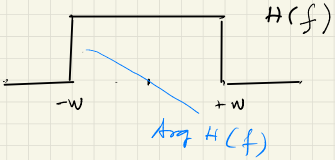


Algunas propiedades

$$v(t) \longleftrightarrow V(f)$$

- Desplazamiento en frecuencia: $v(t)e^{j2\pi f_c t} \longleftrightarrow V(f - f_c)$
- Desplazamiento en tiempo: $v(t - t_d) \longleftrightarrow V(f)e^{-j2\pi f t_d}$ Desfasaje lineal.
- Convolución. Definición: $v * w(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(\tau)w(t-\tau)d\tau$
  - $v(t) \longleftrightarrow V(f)$
  - $w(t) \longleftrightarrow W(f)$
  - $v(t) * w(t) \longleftrightarrow V(f).W(f)$
  - $V(f) * W(f) \longleftrightarrow v(t).w(t)$

Filtro rectangular y retardo



si tuviera fase 0,

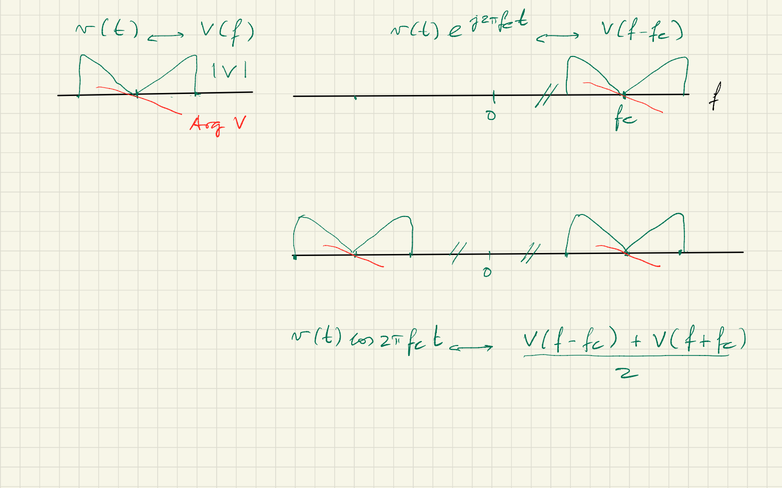
$h(t) = 2WA \operatorname{sinc} 2Wt$

si hay un retardo e^{jwt_d}

$$H(f) = A\, e^{jwt_d} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$$

$$h(t) = 2WA \operatorname{sinc} 2W(t-t_d)$$

Modulación o translación en frecuencia



Producto interno

Señales periódicas

$\langle v \cdot w \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(z) w^*(z) dz$

Producto interno

Señales periódicas
$\langle v \cdot w \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(z) w^*(z) dz$

Señales de energía
$\langle v \cdot w \rangle = \int_{\infty} v(z) w^*(z) dz$

Producto interno

Señales periódicas
$\langle v \cdot w \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(z) w^*(z) dz$

Señales de energía
$\langle v \cdot w \rangle = \int_{\infty} v(z) w^*(z) dz$

La transformada de Fourier conserva el producto interno:
$\langle v(t) \cdot w(t) \rangle = \langle V(f) \cdot W(f) \rangle$

Producto interno

Señales periódicas
$\langle v \cdot w \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(z) w^*(z) dz$

Señales de energía
$\langle v \cdot w \rangle = \int_{\infty} v(z) w^*(z) dz$

La transformada de Fourier conserva el producto interno:
$\langle v(t) \cdot w(t) \rangle = \langle V(f) \cdot W(f) \rangle$

Por lo tanto, así como hay un teorema de la potencia, hay un teorema de la energía, caso particular cuando $v(t) = w(t)$

Algunas señales ortogonales

Algunas señales ortogonales

$sin(n\omega_0 t), sin(m\omega_0 t)$

Algunas señales ortogonales

$sin(n\omega_0 t), sin(m\omega_0 t)$

$sin(n\omega_0 t), cos(n\omega_0 t)$

Algunas señales ortogonales

$sin(n\omega_0 t), sin(m\omega_0 t)$

$sin(n\omega_0 t), cos(n\omega_0 t)$

$e^{j2\pi n f_0 t}, e^{j2\pi m f_0 t}$

Algunas señales ortogonales

$sin(n\omega_0 t), sin(m\omega_0 t)$

$sin(n\omega_0 t), cos(n\omega_0 t)$

$e^{j2\pi n f_0 t}, e^{j2\pi m f_0 t}$

Pulsos rectangulares disjuntos en tiempo o en frecuencia. $rect(\frac{f}{W}), rect(\frac{f-nW}{W})$

Algunas señales ortogonales

$sin(n\omega_0 t), sin(m\omega_0 t)$

$sin(n\omega_0 t), cos(n\omega_0 t)$

$e^{j2\pi n f_0 t}, e^{j2\pi m f_0 t}$

Pulsos rectangulares disjuntos en tiempo o en frecuencia. $rect(\frac{f}{W}), rect(\frac{f-nW}{W})$

En general, señales limitadas en tiempo o en frecuencia de soportes disjuntos.

Algunas señales ortogonales

$sin(n\omega_0 t), sin(m\omega_0 t)$

$sin(n\omega_0 t), cos(n\omega_0 t)$

$e^{j2\pi n f_0 t}, e^{j2\pi m f_0 t}$

Pulsos rectangulares disjuntos en tiempo o en frecuencia. $rect(\frac{f}{W}), rect(\frac{f-nW}{W})$

En general, señales limitadas en tiempo o en frecuencia de soportes disjuntos.

Sinc desplazados: $sinc(2W(t-k_1T_s), sinc(2W(t-k_2T_s)$, donde : $T_s = \frac{1}{2W}$

Procesos aleatorios

Caso discreto en tiempo o muestreado

$R(i) = E[S(j).S(j-i)]$
Si $S(j)$ y $S(i)$ son independientes para $i \neq j$, $R(i) = 0$ para todo i, salvo $R(0) = E(S^2)$

Por ejemplo el ruido blanco muestreado: se supone de muestras no correlacionadas.
$R(0) = N$ y $R(i) = 0$ si $i \neq 0$.

Procesos aleatorios

Caso discreto en tiempo o muestreado

$R(i) = E[S(j).S(j-i)]$
Si $S(j)$ y $S(i)$ son independientes para $i \neq j$, $R(i) = 0$ para todo i, salvo $R(0) = E(S^2)$

Por ejemplo el ruido blanco muestreado: se supone de muestras no correlacionadas.
$R(0) = N$ y $R(i) = 0$ si $i \neq 0$.

Caso continuo

Sea $S(t, \theta)$ un proceso aleatorio ergódico.
Definimos su autocorrelación como $R(\tau) = E_\theta[S(t, \theta).S(t-\tau, \theta)]$ Es independiente de θ porque es variable muda, y de t porque es ergódico.
Su espectro es $G(f) = \mathcal{F}(R(\tau))$
El ruido blanco continuo tendría correlación $R(\tau) = N\delta(0)$.
Entonces su espectro es plano, $G(f) = N$. Es una aproximación porque la potencia daría infinito.

Funcional δ de Dirac

Definición: elige un punto

$$\int f(t).\delta(t)dt = f(0)$$
$$\int f(t).\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

Funcional δ de Dirac

Definición: elige un punto

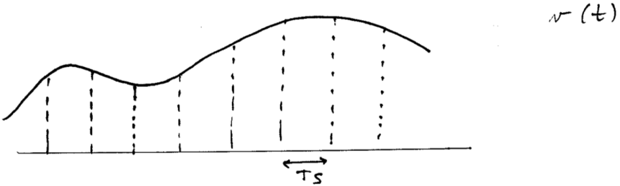
$\int f(t).\delta(t)dt = f(0)$
$\int f(t).\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$

Peine de Dirac: es periódico y sería el muestreador ideal.

$\sum \delta(t-kT_s)$ Frecuencia fundamental $f_0 = \frac{1}{T_s}$
coeficientes de Fourier $c(nf_0) = 1$

Desarrollo en serie de Fourier de un peine de Dirac:
$\sum \delta(t-kT_s) = \sum e^{-j2\pi nf_0 t}$

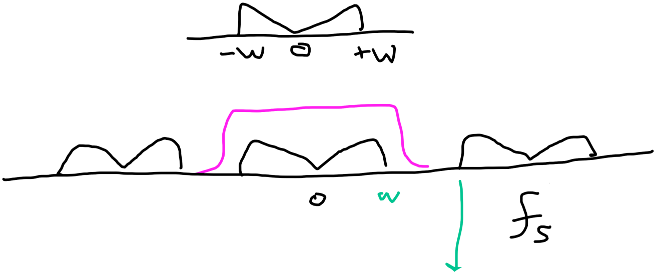
Muestreo



- Tren de pulsos $s(t) = \sum \delta(t - kTs)$
- $s(t) = \sum c(nf_s)e^{j2\pi nf_s t}$
- $v(t) \longleftrightarrow V(f)$
- $v_s(t) = v(t).s(t) = \sum v(kT_s)\delta(t - kT_s) \longleftrightarrow \sum c(nf_s)V(f - nf_s)$

La señal muestreada tiene espectro periódico o casi periódico. Se puede muestrear con una señal periódica distinta de un peine de Dirac.

Espectro periódico y separación

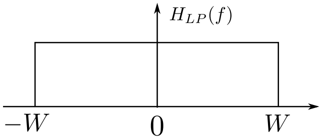


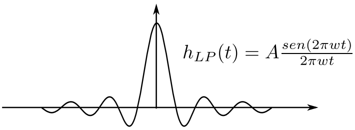
Si $f_s \geq 2W$ $\quad$ $f_s - W$

Se puede filtrar pasabajos.

Reconstrucción 1

Se recupera la señal original con un filtro pasabajos de ancho de banda W





Señal muestreada

$$v_s(t) = \sum v(kT_s)\delta(t - kT_s)$$

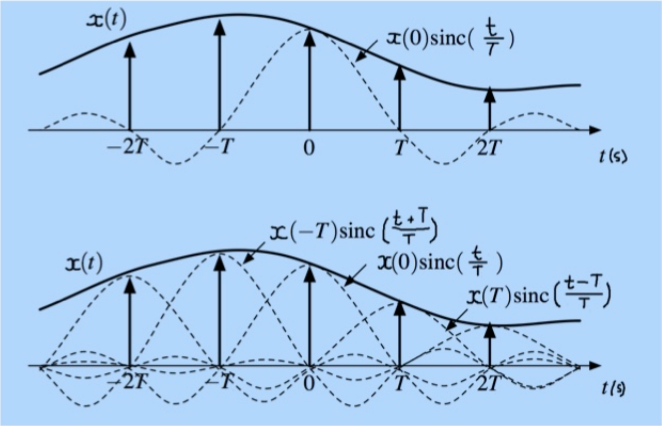
Señal reconstruída

$$g(t) = \sum v(kT_s)h_{LP}(t - kT_s) = \sum v(kT_s)\frac{sen\left[2\pi W(t - kT_s)\right]}{2\pi W(t - kT_s)},$$

desarrollo en una base ortogonal

$$f_k(t) = sinc[2w(t - k.T_s)]$$

Reconstrucción 2



Teorema del muestreo

Teorema (del muestreo)

Una señal de ancho de banda W puede ser reconstruida si se muestrea a $f_s > 2W$

Una función limitada en banda W tiene $2W$ grados de libertad por unidad de tiempo. Se puede decir que tiene dimensión $2W$. Corresponde a un desarrollo en funciones $sinc(2W(t - kT_s))$