

# DINÁMICA | Lagrange

Fundamentos de Robótica Industrial

Versión 2025





UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY

FAACULTAD DE  
INGENIERIA



IMPI  
INSTITUTO DE  
INGENIERIA MECANICA  
Y PRODUCCION INDUSTRIAL



## Fundamentos de Robótica Industrial



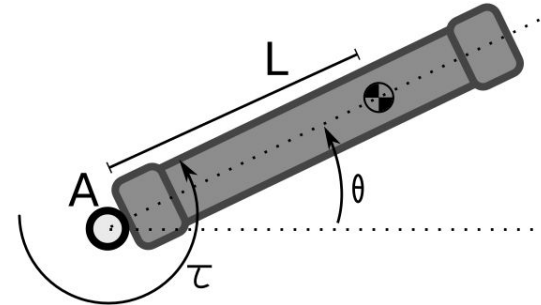
## Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

Principalmente existen 2 procedimientos para determinar el modelo dinámico de un robot.

1. El **método de Newton-Euler**, que se basa en la aplicación de la primera y la segunda ley de Newton.
2. La **formulación Lagrangiana**, que se basa en consideraciones energéticas.

Consideremos el siguiente ejemplo:

- un robot rígido,
- articulado en A,
- peso  $m$  uniformemente distribuido,
- distancia al centro de masa  $L$ ,
- par articular  $\tau$



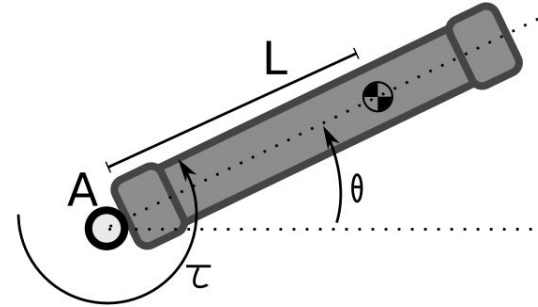
## Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

**formulación Lagrangiana**

$$L = K - U$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- $q_i$ : coordenadas generalizadas
- $\tau_i$ : fuerza o par aplicado en el grado de libertad  $q_i$



## Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

### formulación Lagrangiana

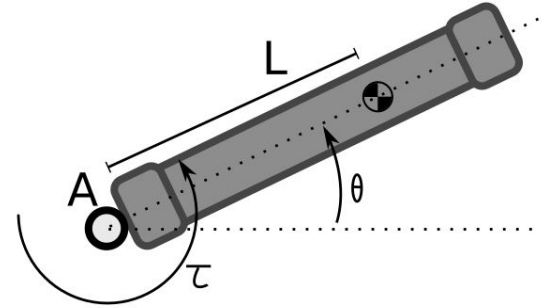
$$L = K - U$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- $q_i$ : coordenadas generalizadas
- $\tau_i$ : fuerza o par aplicado en el grado de libertad  $q_i$

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = Mgh = MgL \sin(\theta) \longrightarrow L = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 - MgL \sin(\theta)$$



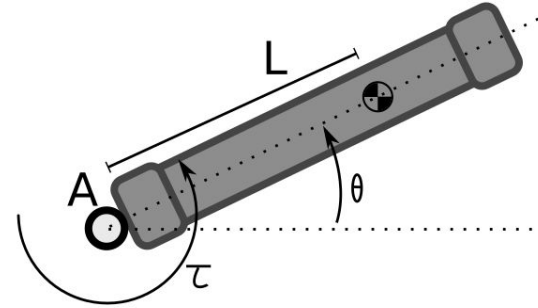
# Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

## formulación Lagrangiana

$$L = K - U$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- $q_i$ : coordenadas generalizadas
- $\tau_i$ : fuerza o par aplicado en el grado de libertad  $q_i$



$$K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = Mgh = MgL \sin(\theta) \longrightarrow L = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 - MgL \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -MgL \cos(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = M L^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = M L^2 \ddot{\theta} \longrightarrow \boxed{\tau = M L^2 \ddot{\theta} + M g L \cos(\theta)}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

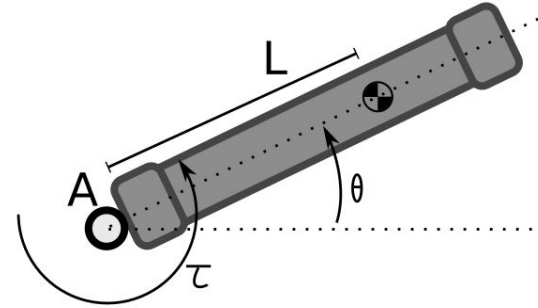
## método de Newton-Euler

Variación de  
cantidad de  
movimiento

$$\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})$$

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

- $\boldsymbol{\omega}$ : Velocidad angular
- $\mathbf{I}$ : Tensor de inercias
- $\mathbf{T}$ : Torques externos
- $\mathbf{F}$ : Fuerzas externas
- $m$ : masa
- $\mathbf{v}$ : velocidad



# Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

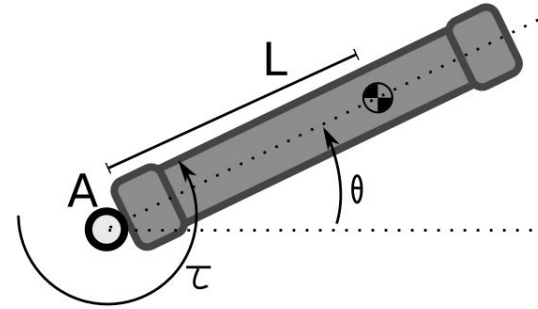
## método de Newton-Euler

Variación de  
cantidad de  
movimiento

$$\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})$$

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

- $\boldsymbol{\omega}$ : Velocidad angular
- $\mathbf{I}$ : Tensor de inercias
- $\mathbf{T}$ : Torques externos
- $\mathbf{F}$ : Fuerzas externas
- $m$ : masa
- $\mathbf{v}$ : velocidad





# Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

## método de Newton-Euler

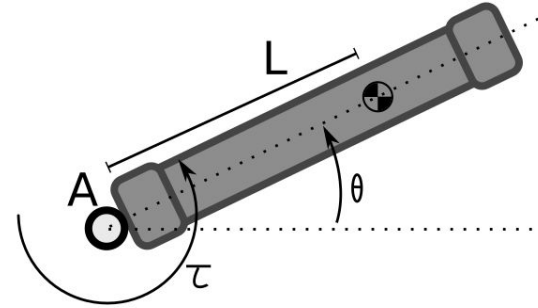
Variación de  
cantidad de  
movimiento

$$\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})$$

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

- $\boldsymbol{\omega}$ : Velocidad angular
- $\mathbf{I}$ : Tensor de inercias
- $\mathbf{T}$ : Torques externos
- $\mathbf{F}$ : Fuerzas externas
- $m$ : masa
- $\mathbf{v}$ : velocidad

$$\tau - MgL\cos(\theta) = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}\ddot{\theta}$$



# Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

## método de Newton-Euler

Variación de  
cantidad de  
movimiento

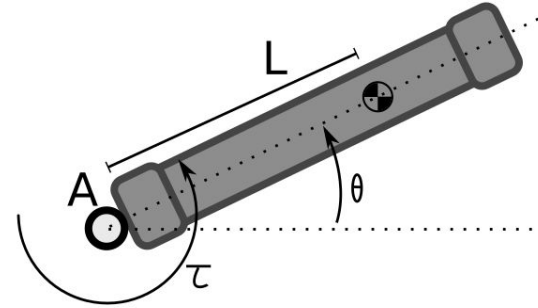
$$\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})$$

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

- $\boldsymbol{\omega}$ : Velocidad angular
- $\mathbf{I}$ : Tensor de inercias
- $\mathbf{T}$ : Torques externos
- $\mathbf{F}$ : Fuerzas externas
- $m$ : masa
- $\mathbf{v}$ : velocidad

$$\tau - MgL\cos(\theta) = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}\ddot{\theta}$$

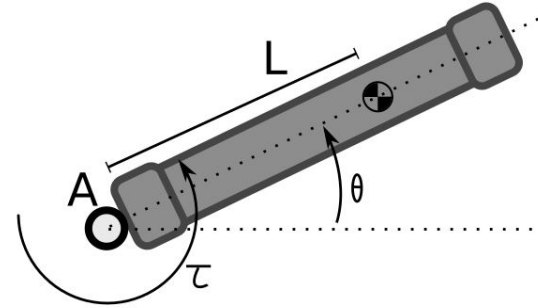
$$\tau = ML^2\ddot{\theta} + MgL\cos(\theta)$$



## Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

### Recordemos

Independientemente del procedimiento para obtener el **modelo dinámico del robot**, para  $n$  GDL el modelo se presenta de la siguiente forma:



$$\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q)$$

Donde:

$q$ : vector ( $n$ ) de coordenadas articulares

$T$ : vector ( $n$ ) de cargas en cada articulación

$\mathbf{M}$ : Matriz ( $n \times n$ ) de inercias

$\mathbf{C}$ : Vector de fuerzas de Coriolis + centrífugas

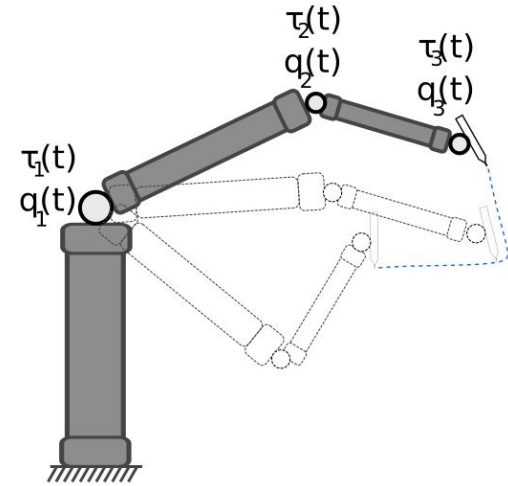
$\mathbf{G}$ : Vector de fuerzas gravitatorias

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## *Lagrange (varios eslabones)*

La idea es analizar cada componente de esta teoría para determinar cuáles son los parámetros necesarios a conocer de un robot rígido multiarticular.

Objetivo → Modelo Dinámico:  $\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q)$



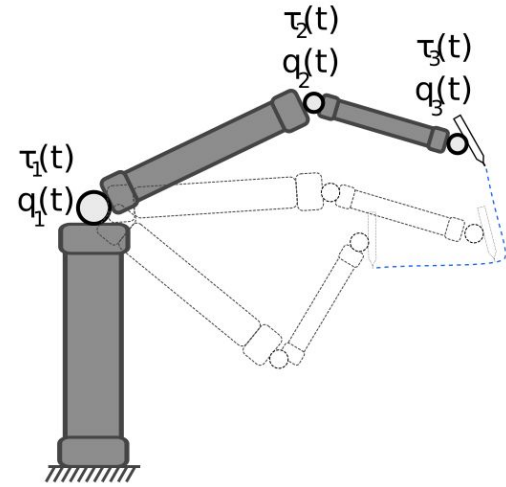
# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## *Lagrange (varios eslabones)*

La idea es analizar cada componente de esta teoría para determinar cuáles son los parámetros necesarios a conocer de un robot rígido multiarticular.

Objetivo → Modelo Dinámico:  $\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q)$

Teoría → Lagrange (multiarticular):  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Lagrange (varios eslabones)

La idea es analizar cada componente de esta teoría para determinar cuáles son los parámetros necesarios a conocer de un robot rígido multiarticular.

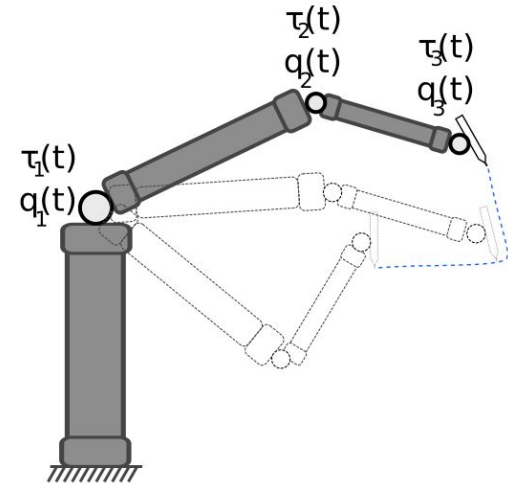
Objetivo → Modelo Dinámico:  $\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q)$

Teoría → Lagrange (multiarticular):  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$

Definición → Lagrangiano:  $L = K - U$

Donde: → K es la Energía cinética

→ U es la Energía Potencial



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Lagrange (varios eslabones)

La idea es analizar cada componente de esta teoría para determinar cuáles son los parámetros necesarios a conocer de un robot rígido multiarticular.

Objetivo → Modelo Dinámico:  $\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q)$

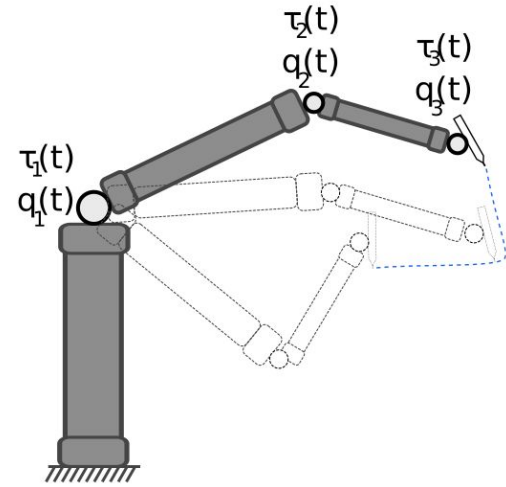
Teoría → Lagrange (multiarticular):  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$

Definición → Lagrangiano:  $L = K - U$

Donde: → K es la Energía cinética

→ U es la Energía Potencial

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$$



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Lagrange (varios eslabones)

La idea es analizar cada componente de esta teoría para determinar cuáles son los parámetros necesarios a conocer de un robot rígido multiarticular.

Objetivo → Modelo Dinámico:  $\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q)$

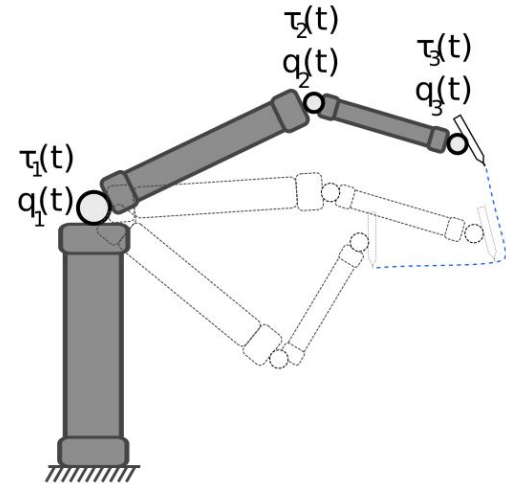
Teoría → Lagrange (multiarticular):  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$

Definición → Lagrangiano:  $L = K - U$

Donde: → K es la Energía cinética

→ U es la Energía Potencial

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q}}_{\text{Fuerzas inerciales}} + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial q}}_G = \tau$$

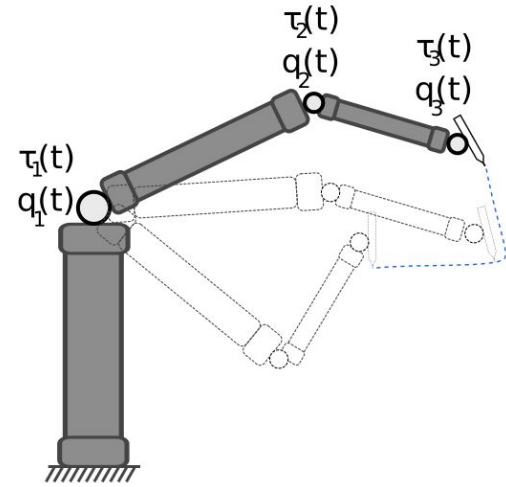




## Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

### **Lagrange (varios eslabones)**

Analicemos cada término de: 
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$$

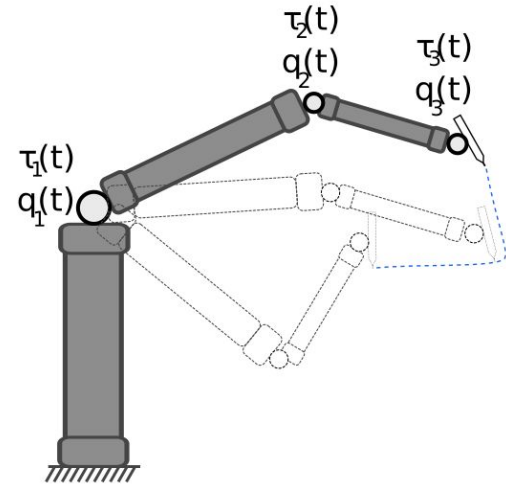


# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Lagrange (varios eslabones)

Analicemos cada término de: 
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$$

considerando que K es la energía cinética:  $K = \dots$

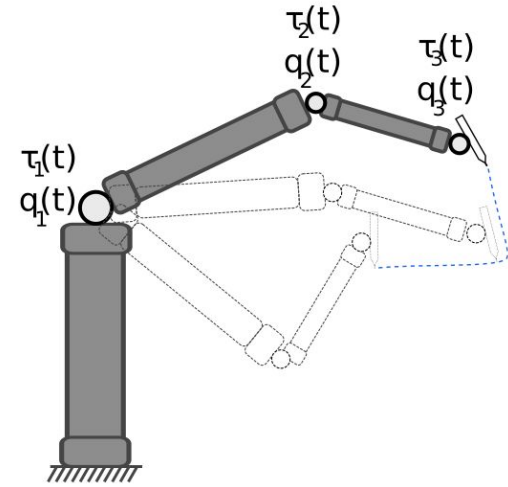


## Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

### **Lagrange (varios eslabones)**

Analicemos cada término de:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$

considerando que K es la energía cinética:  $K = \sum_i^n K_i = \dots$

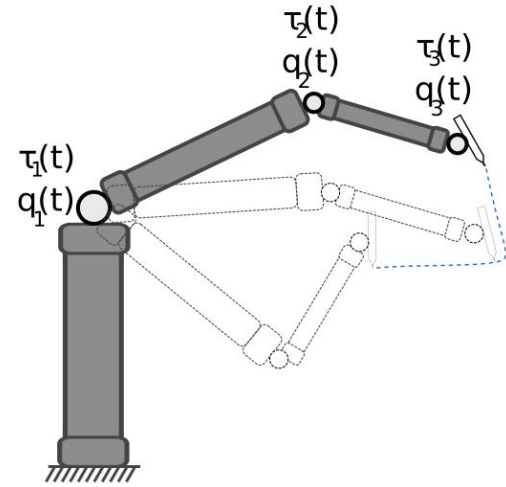


# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Lagrange (varios eslabones)

Analicemos cada término de:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$

considerando que K es la energía cinética:  $K = \sum_i^n K_i = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q}$



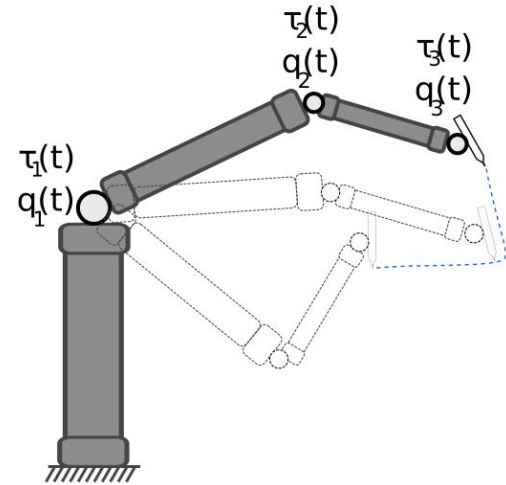
# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Lagrange (varios eslabones)

Analicemos cada término de:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$

considerando que K es la energía cinética:  $K = \sum_i^n K_i = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q}$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q} \right) = \mathbf{M}(q) \dot{q}$$



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

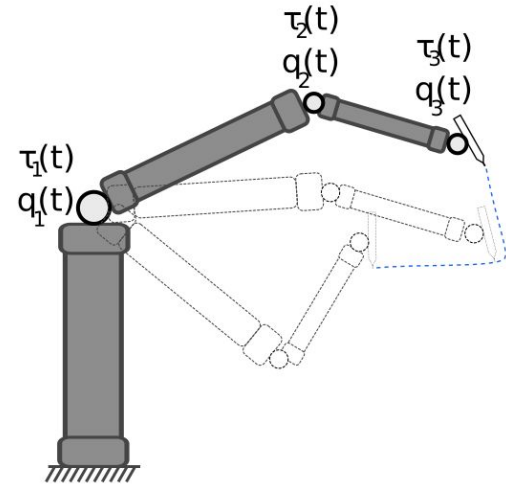
## Lagrange (varios eslabones)

Analicemos cada término de:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$

considerando que K es la energía cinética:  $K = \sum_i^n K_i = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q}$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q} \right) = \mathbf{M}(q) \dot{q}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} (\mathbf{M}(q) \dot{q}) = \dot{\mathbf{M}}(q) \dot{q} + \mathbf{M}(q) \ddot{q}$$



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Lagrange (varios eslabones)

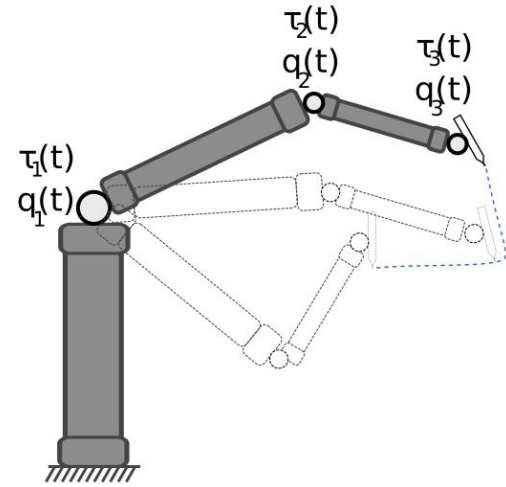
Analicemos cada término de:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$

considerando que K es la energía cinética:  $K = \sum_i^n K_i = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q}$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q} \right) = \mathbf{M}(q) \dot{q}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} (\mathbf{M}(q) \dot{q}) = \dot{\mathbf{M}}(q) \dot{q} + \mathbf{M}(q) \ddot{q}$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1} \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_n} \dot{q} \end{bmatrix}$$



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Lagrange (varios eslabones)

Analicemos cada término de:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$

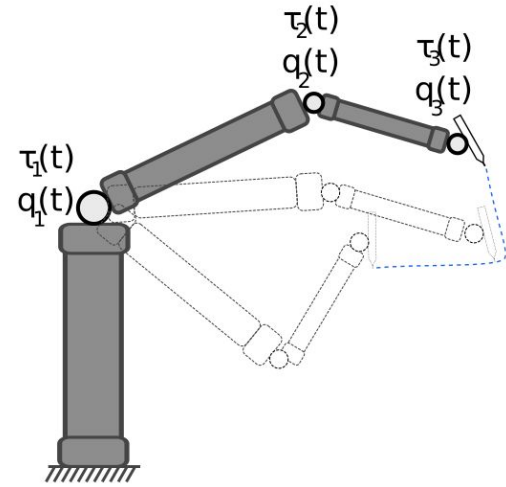
considerando que K es la energía cinética:  $K = \sum_i^n K_i = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q}$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q} \right) = \mathbf{M}(q) \dot{q}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} (\mathbf{M}(q) \dot{q}) = \dot{\mathbf{M}}(q) \dot{q} + \mathbf{M}(q) \ddot{q}$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1} \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_n} \dot{q} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}(q) \ddot{q} + \dot{\mathbf{M}}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1} \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_n} \dot{q} \end{bmatrix} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$$





# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Lagrange (varios eslabones)

Analicemos cada término de:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$

considerando que K es la energía cinética:  $K = \sum_i^n K_i = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q}$

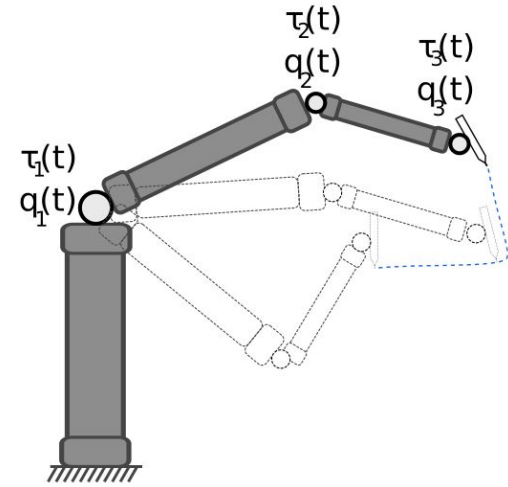
$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q} \right) = \mathbf{M}(q) \dot{q}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} (\mathbf{M}(q) \dot{q}) = \dot{\mathbf{M}}(q) \dot{q} + \mathbf{M}(q) \ddot{q}$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1} \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_n} \dot{q} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}(q) \ddot{q} + \dot{\mathbf{M}}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1} \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1} \dot{q} \end{bmatrix} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$$

$$\mathbf{M}(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau$$



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Lagrange (varios eslabones)

Analicemos cada término de:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$

considerando que K es la energía cinética:  $K = \sum_i^n K_i = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q}$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q} \right) = \mathbf{M}(q) \dot{q}$$

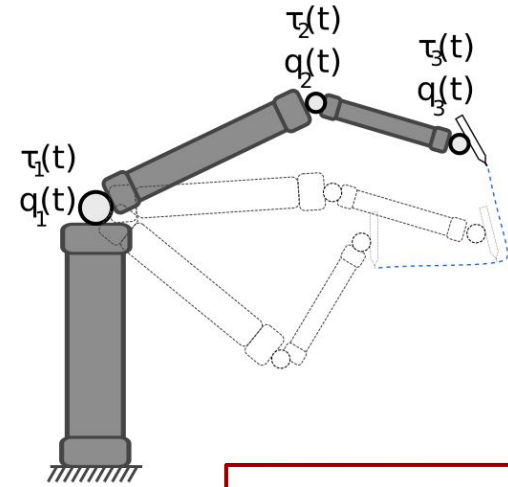
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} (\mathbf{M}(q) \dot{q}) = \dot{\mathbf{M}}(q) \dot{q} + \mathbf{M}(q) \ddot{q}$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1} \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_n} \dot{q} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}(q) \ddot{q} + \dot{\mathbf{M}}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1} \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1} \dot{q} \end{bmatrix} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$$

$$\mathbf{M}(q) \ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q}) + \mathbf{G}(q) = \tau$$

¿Quién es  $\mathbf{M}(q)$ ?



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

**Lagrange (varios eslabones)**

¿Quién es  $\mathbf{M}(q)$ ?

La idea es calcular la energía cinética como:  $K = \sum_i^n K_i$

Luego sabiendo que  $K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q}$  inferir quién es  $\mathbf{M}(q)$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

**Lagrange (varios eslabones)**

¿Quién es  $\mathbf{M}(q)$ ?

La idea es calcular la energía cinética como:  $K = \sum_i^n K_i$

Luego sabiendo que  $K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q}$  inferir quién es  $\mathbf{M}(q)$

**“Recordando” la definición de Energía cinética:**

Trabajo realizado por las fuerzas externas para traer el sistema desde el reposo hasta el estado actual.

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

**Lagrange (varios eslabones)**

¿Quién es  $\mathbf{M}(q)$ ?

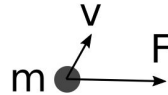
La idea es calcular la energía cinética como:  $K = \sum_i^n K_i$

Luego sabiendo que  $K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q}$  inferir quién es  $\mathbf{M}(q)$

**“Recordando” la definición de Energía cinética:**

Trabajo realizado por las fuerzas externas para traer el sistema desde el reposo hasta el estado actual.

Masa puntual:



$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

**Lagrange (varios eslabones)**

¿Quién es  $\mathbf{M}(q)$ ?

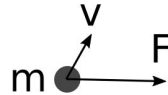
La idea es calcular la energía cinética como:  $K = \sum_i^n K_i$

Luego sabiendo que  $K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q}$  inferir quién es  $\mathbf{M}(q)$

**“Recordando” la definición de Energía cinética:**

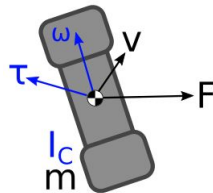
Trabajo realizado por las fuerzas externas para traer el sistema desde el reposo hasta el estado actual.

Masa puntual:



$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Cuerpo rígido:



$$K = \frac{1}{2} \omega^T \mathbf{I}_c \omega + \frac{1}{2}mv^2$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

**Lagrange (varios eslabones)**

¿Quién es  $M(q)$ ?

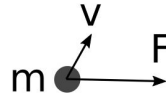
La idea es calcular la energía cinética como:  $K = \sum_i^n K_i$

Luego sabiendo que  $K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$  inferir quién es  $M(q)$

**“Recordando” la definición de Energía cinética:**

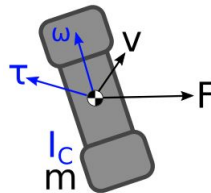
Trabajo realizado por las fuerzas externas para traer el sistema desde el reposo hasta el estado actual.

Masa puntual:

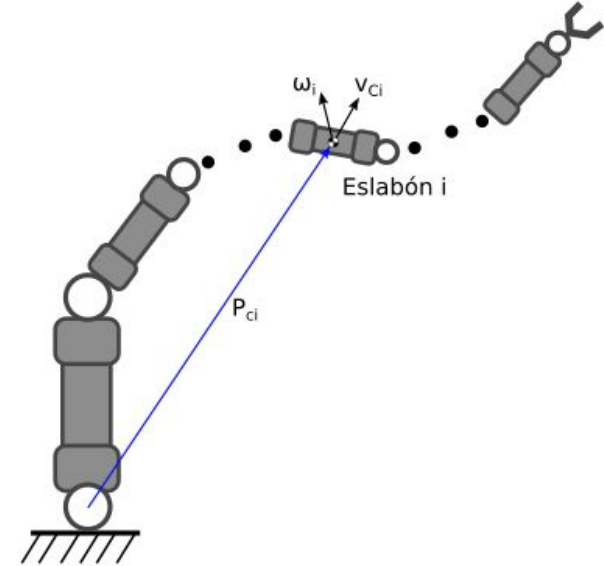


$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Cuerpo rígido:



$$K = \frac{1}{2}\omega^T I_c \omega + \frac{1}{2}mv^2$$



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

**Lagrange (varios eslabones)**

¿Quién es  $M(q)$ ?

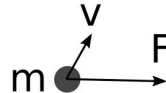
La idea es calcular la energía cinética como:  $K = \sum_i^n K_i$

Luego sabiendo que  $K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$  inferir quién es  $M(q)$

**“Recordando” la definición de Energía cinética:**

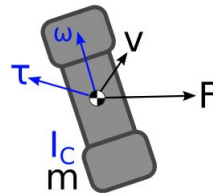
Trabajo realizado por las fuerzas externas para traer el sistema desde el reposo hasta el estado actual.

Masa puntual:



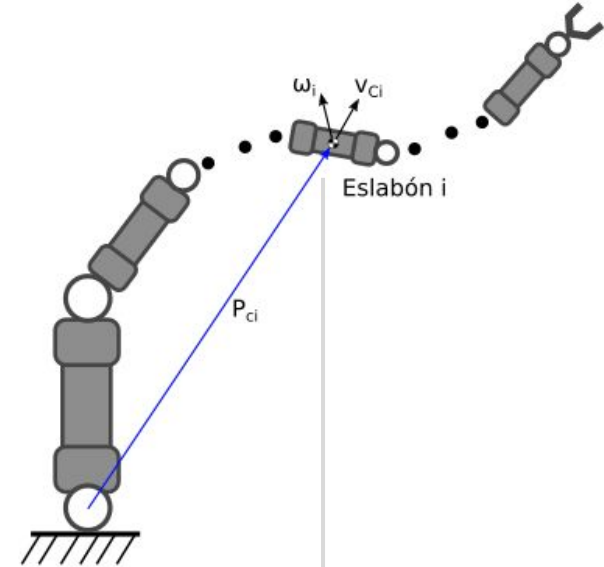
$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Cuerpo rígido:



$$K = \frac{1}{2} \omega^T I_c \omega + \frac{1}{2} m v^2$$

$$K_i = \frac{1}{2} (m_i v_{ci}^T v_{ci} + \omega_i^T I_{ci} \omega_i)$$



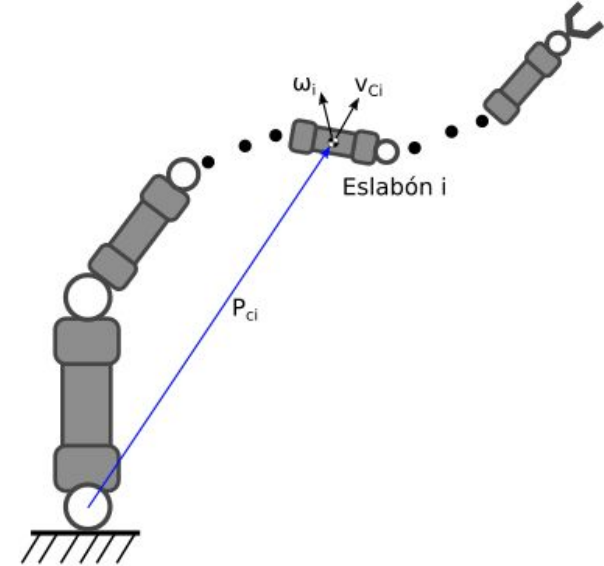


# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

**Lagrange (varios eslabones)**

¿Quién es  $\mathbf{M}(q)$ ?

Entonces: 
$$K = \sum_i^n K_i = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q}$$
$$K = \sum_i^n K_i = \sum_i^n \frac{1}{2} (m_i v_{ci}^T v_{ci} + \omega_i^T \mathbf{I}_{ci} \omega_i)$$



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

**Lagrange (varios eslabones)**

¿Quién es  $\mathbf{M}(q)$ ?

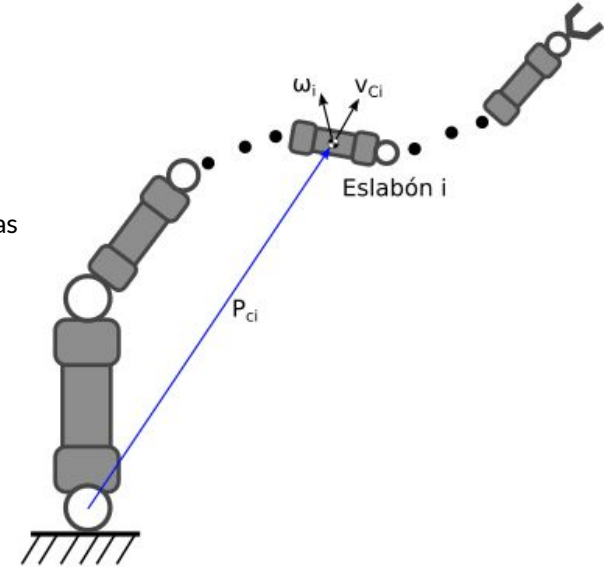
Entonces:

$$K = \sum_i^n K_i = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q}$$

Velocidades art. generalizadas

$$K = \sum_i^n K_i = \sum_i^n \frac{1}{2} (m_i v_{ci}^T v_{ci} + \omega_i^T \mathbf{I}_{ci} \omega_i)$$

Velocidades del CM



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

**Lagrange (varios eslabones)**

¿Quién es  $M(q)$ ?

Entonces:

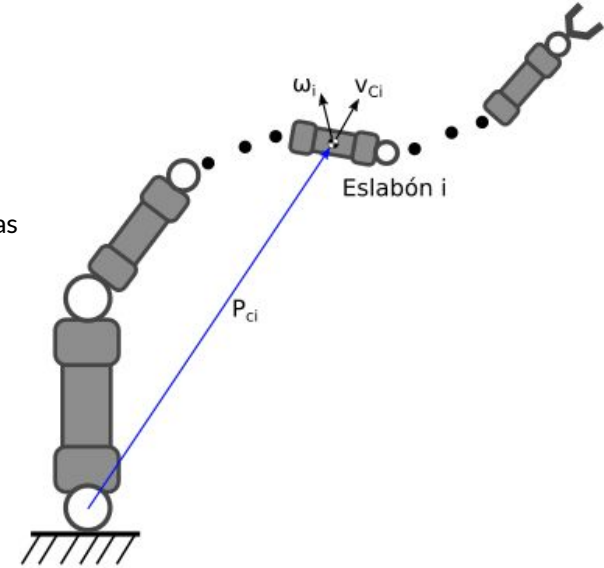
$$K = \sum_i^n K_i = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$$

Velocidades art. generalizadas

$$K = \sum_i^n K_i = \sum_i^n \frac{1}{2} (m_i v_{ci}^T v_{ci} + \omega_i^T I_{ci} \omega_i)$$

Velocidades del CM

Relacionando las velocidades del centro de masa del eslabón  $i$  con su velocidad art. generalizada a partir de las definiciones de los Jacobianos lineal y angular  $J_v$  y  $J_w$  respectivamente:

$$v_{c_i} = J_{v_i} \dot{q} \quad \omega_{c_i} = J_{w_i} \dot{q}$$


# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

**Lagrange (varios eslabones)**

¿Quién es  $M(q)$ ?

Entonces:

$$K = \sum_i^n K_i = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q}$$

Velocidades art. generalizadas

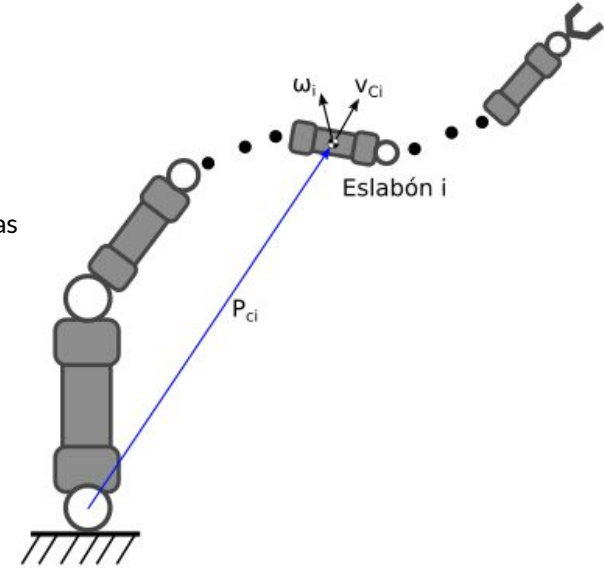
$$K = \sum_i^n K_i = \sum_i^n \frac{1}{2} (m_i v_{ci}^T v_{ci} + \omega_i^T I_{ci} \omega_i)$$

Velocidades del CM

Relacionando las velocidades del centro de masa del eslabón  $i$  con su velocidad art. generalizada a partir de las definiciones de los Jacobianos lineal y angular  $J_v$  y  $J_w$  respectivamente:

$$v_{ci} = J_{v_i} \dot{q} \quad \omega_{ci} = J_{w_i} \dot{q}$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (m_i \dot{q}^T J_{v_i}^T J_{v_i} \dot{q} + \dot{q}^T J_{w_i}^T I_{ci} J_{w_i} \dot{q})$$

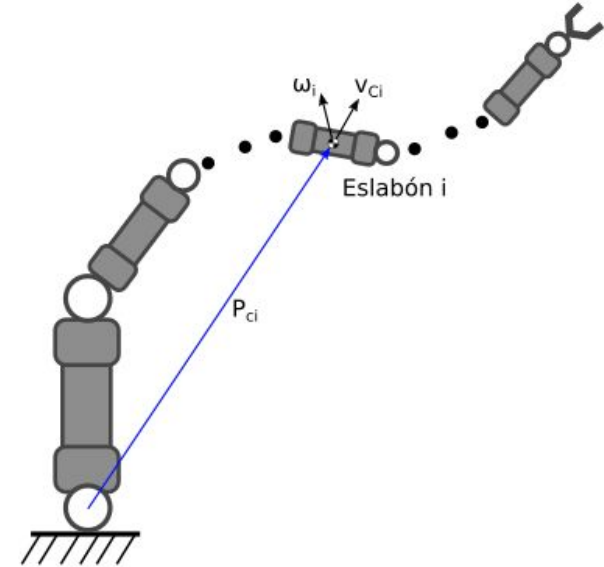


# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

**Lagrange (varios eslabones)**

¿Quién es  $M(q)$ ?

Entonces: 
$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (m_i \dot{\mathbf{q}}^T J_{v_i}^T J_{v_i} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T J_{\omega_i}^T \mathbf{I}_{c_i} J_{\omega_i} \dot{\mathbf{q}})$$



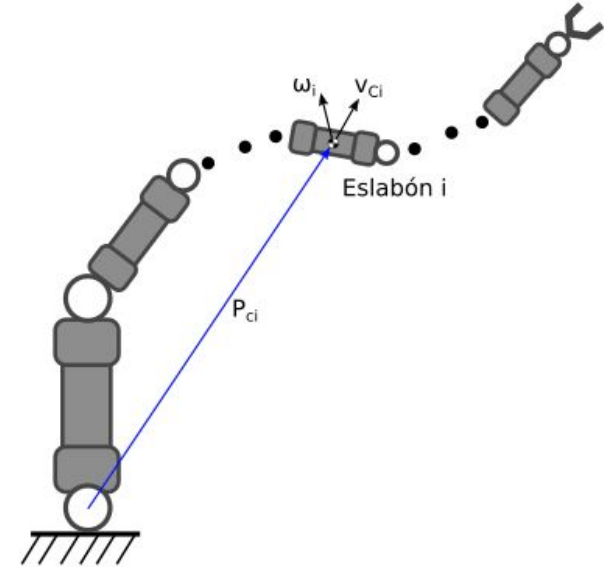
# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

**Lagrange (varios eslabones)**

¿Quién es  $M(q)$ ?

Entonces: 
$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (m_i \dot{q}^T J_{v_i}^T J_{v_i} \dot{q} + \dot{q}^T J_{\omega_i}^T I_{c_i} J_{\omega_i} \dot{q})$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[ \sum_{i=1}^n (m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T I J_{\omega_i}) \right] \dot{q}$$



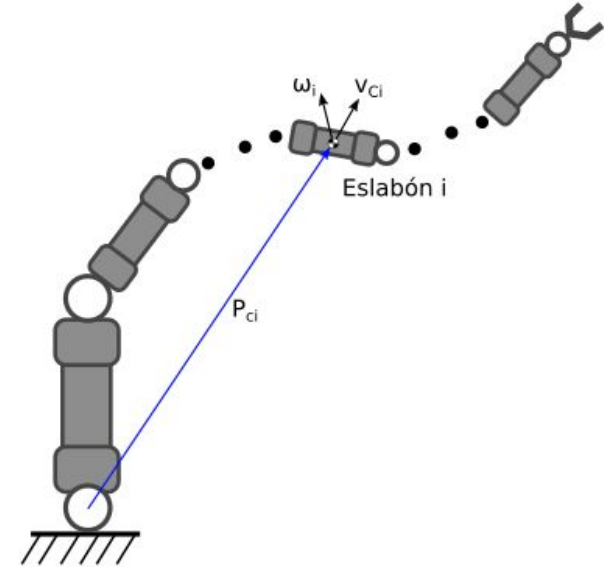
# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

**Lagrange (varios eslabones)**

¿Quién es  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ ?

Entonces: 
$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (m_i \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{v_i}^T \mathbf{J}_{v_i} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\omega_i}^T \mathbf{I}_{c_i} \mathbf{J}_{\omega_i} \dot{\mathbf{q}})$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left[ \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{J}_{v_i}^T \mathbf{J}_{v_i} + \mathbf{J}_{\omega_i}^T \mathbf{I}_{c_i} \mathbf{J}_{\omega_i}) \right] \dot{\mathbf{q}}$$



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

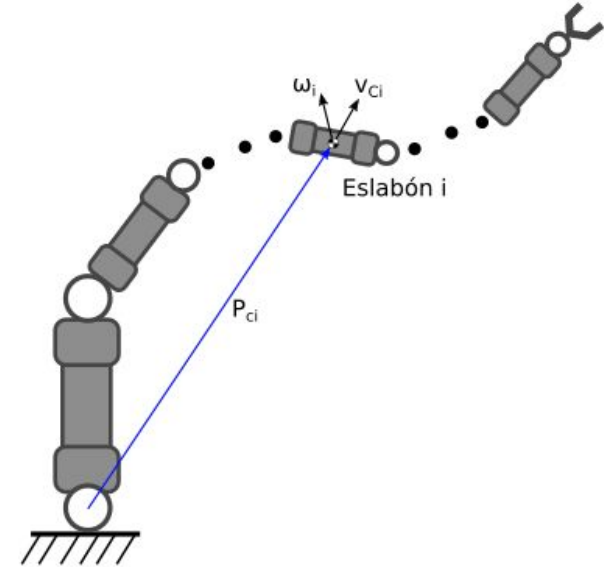
**Lagrange (varios eslabones)**

¿Quién es  $M(q)$ ?

Entonces: 
$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (m_i \dot{q}^T J_{v_i}^T J_{v_i} \dot{q} + \dot{q}^T J_{\omega_i}^T I_{c_i} J_{\omega_i} \dot{q})$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[ \sum_{i=1}^n (m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T I J_{\omega_i}) \right] \dot{q}$$

$$M(q) = \left[ \sum_{i=1}^n (m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T I J_{\omega_i}) \right]$$





# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

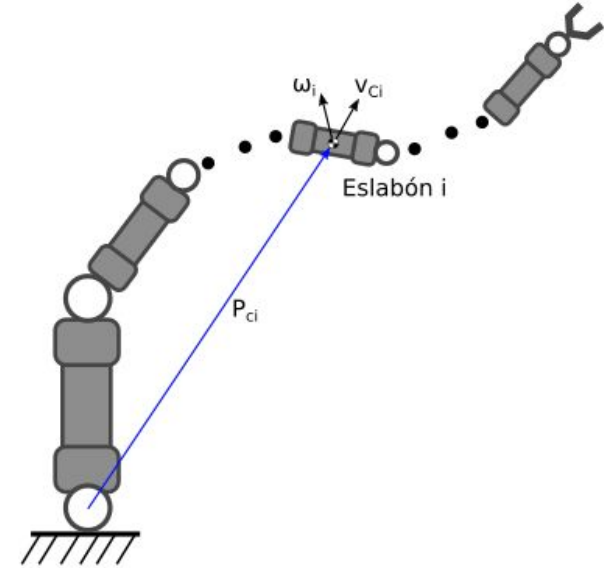
**Lagrange (varios eslabones)**

Entonces: 
$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q} = \sum_i^n \frac{1}{2} (m_i \dot{q}^T \mathbf{J}_{P_i}^T \mathbf{J}_{P_i} \dot{q} + \dot{q}^T \mathbf{J}_{O_i}^T \mathbf{I}_{ci} \mathbf{J}_{O_i} \dot{q})$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[ \sum_i^n (m_i \mathbf{J}_{P_i}^T \mathbf{J}_{P_i} + \mathbf{J}_{O_i}^T \mathbf{I}_{ci} \mathbf{J}_{O_i}) \right] \dot{q}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \left[ \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{J}_{v_i}^T \mathbf{J}_{v_i} + \mathbf{J}_{\omega_i}^T \mathbf{I} \mathbf{J}_{\omega_i}) \right]$$

¿Quiénes son los Jacobianos  $\mathbf{J}_{v_i}$  y  $\mathbf{J}_{\omega_i}$ ?



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

**Lagrange (varios eslabones)**

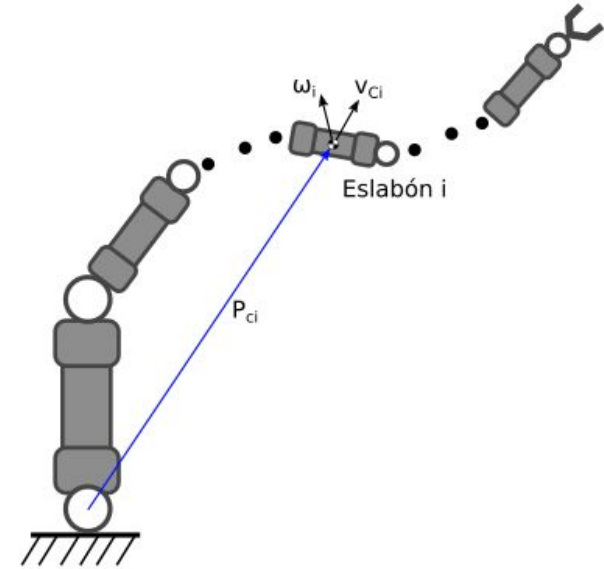
Entonces: 
$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q} = \sum_i^n \frac{1}{2} (m_i \dot{q}^T \mathbf{J}_{P_i}^T \mathbf{J}_{P_i} \dot{q} + \dot{q}^T \mathbf{J}_{O_i}^T \mathbf{I}_{ci} \mathbf{J}_{O_i} \dot{q})$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathbf{M}(q) \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left[ \sum_i^n (m_i \mathbf{J}_{P_i}^T \mathbf{J}_{P_i} + \mathbf{J}_{O_i}^T \mathbf{I}_{ci} \mathbf{J}_{O_i}) \right] \dot{q}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \left[ \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{J}_{v_i}^T \mathbf{J}_{v_i} + \mathbf{J}_{\omega_i}^T \mathbf{I} \mathbf{J}_{\omega_i}) \right]$$

¿Quiénes son los Jacobianos  $\mathbf{J}_{v_i}$  y  $\mathbf{J}_{\omega_i}$ ?

Son un poco diferentes a las de cinemática diferencial, puesto que aquí necesitamos matrices que representen el jacobiano **hasta el centro de masa  $i$** , y no el jacobiano referente a la terminal.



$$\mathbf{J}_{v_i} = \left[ \frac{\partial P_{C_i}}{\partial q_1}, \frac{\partial P_{C_i}}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial P_{C_i}}{\partial q_i}, 0, \dots, 0 \right]$$

$$\mathbf{J}_{\omega_i} = [\bar{e}_1 z_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_i z_i, 0, \dots, 0]$$

$$\bar{e}_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es de revolucion} \\ 0 & \text{si } i \text{ es prismatica} \end{cases}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Lagrange (varios eslabones)

Entonces, la resolución del modelo dinámico a partir de la formulación de Lagrange es “SIMPLEMENTE”:

**Resolver**  $\rightarrow M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau$

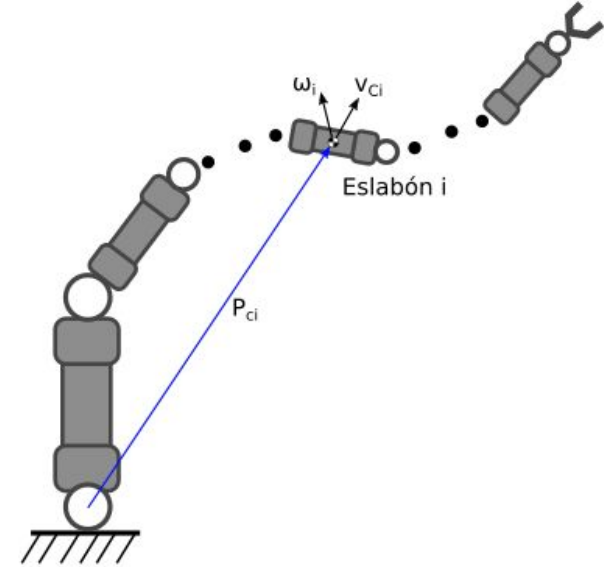
**Donde:**

$$M(q)\ddot{q} + \dot{M}(q)\dot{q} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_1} \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_1} \dot{q} \end{bmatrix} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$$

$$M(q) = \left[ \sum_{i=1}^n (m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T I J_{\omega_i}) \right]$$

$$J_{v_i} = \left[ \frac{\partial P_{C_i}}{\partial q_1}, \frac{\partial P_{C_i}}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial P_{C_i}}{\partial q_i}, 0, \dots, 0 \right]$$

$$J_{\omega_i} = [\bar{\epsilon}_1 z_1, \bar{\epsilon}_2, \dots, \bar{\epsilon}_i z_i, 0, \dots, 0] \quad \bar{\epsilon}_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es de revolucion} \\ 0 & \text{si } i \text{ es prismatica} \end{cases}$$



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Lagrange (varios eslabones)

Entonces, la resolución del modelo dinámico a partir de la formulación de Lagrange es "SIMPLEMENTE":

**Resolver** →  $M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau$

**Donde:**

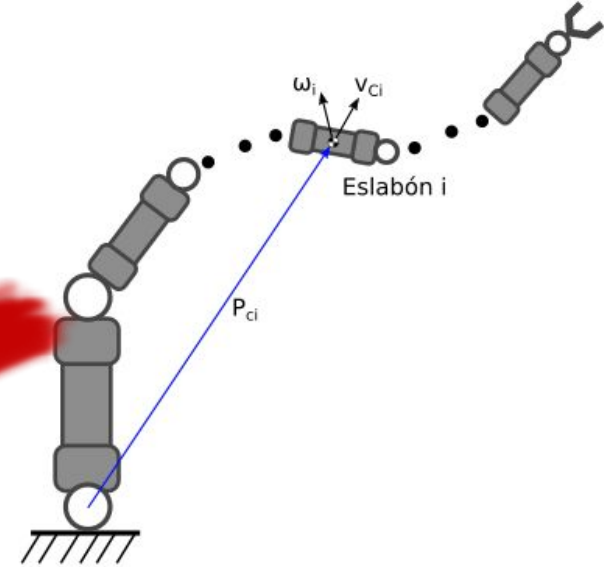
$$M(q)\ddot{q} + M(q)\frac{1}{\dot{q}} \begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_1} \dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial M(q)}{\partial q_1} \dot{q} \end{bmatrix} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$$

$$M(q) = \left[ \sum_{i=1}^n (m_i J_{P_{Ci}}^T J_{P_{Ci}} + I_{\omega_i}) \right]$$

$$J_{P_{Ci}} = \left[ \frac{\partial P_{Ci}}{\partial q_1}, \frac{\partial P_{Ci}}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial P_{Ci}}{\partial q_i}, 0, \dots, 0 \right]$$

$$J_{\omega_i} = [\bar{\epsilon}_1 z_1, \bar{\epsilon}_2, \dots, \bar{\epsilon}_i z_i, 0, \dots, 0]$$

$$\bar{\epsilon}_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es de revolución} \\ 0 & \text{si } i \text{ es prismática} \end{cases}$$



**Por suerte hay un algoritmo!!!**

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Algoritmo de Lagrange

Utiliza la representación de Denavit-Hartenberg basada en las matrices de transformación homogénea (4x4), provocando una complejidad computacional de orden 4 ( $n^4$ ) por la redundancia contenida en las matrices  ${}_{i-1}A_i$ .

**L1.** Asignar a cada eslabón un sistema de referencia de acuerdo a las normas de DH.

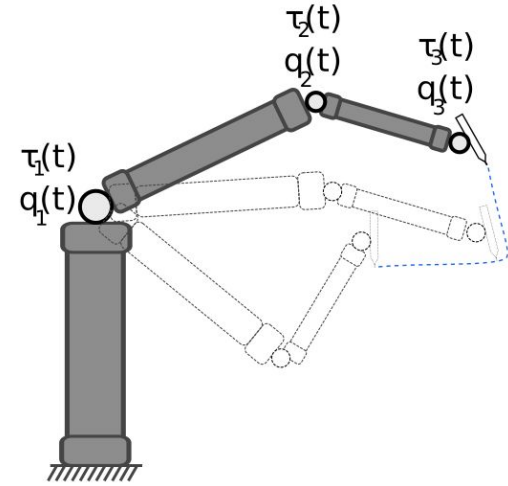
**L2.** Calcular las matrices de transformación  ${}_{i-1}A_i$  para cada eslabón  $i$ .

**L3.** Calcular las matrices  $U_{ij}$  según se definen:

$$U_{ij} = \frac{\partial {}_0A_i}{\partial q_j} = \begin{cases} {}_0A_{j-1}Q_j {}_{j-1}A_i & \text{si } j \leq i \\ \mathbf{0}_{(4 \times 4)} & \text{si } j > i \end{cases}$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ si la articulación } i \text{ es de rotación}$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ si la articulación } i \text{ es de traslación}$$



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

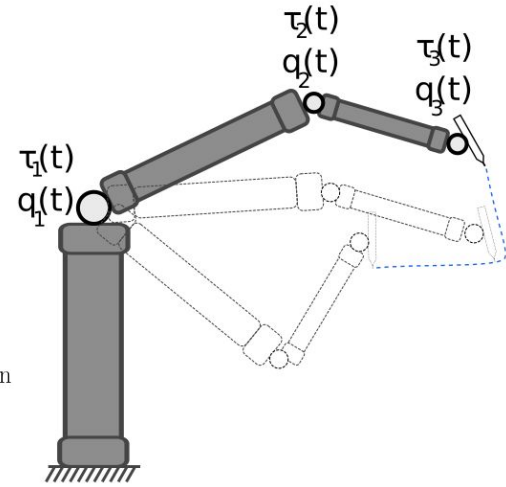
## Algoritmo de Lagrange

L4. Calcular las matrices  $U_{ijk}$  según se definen:

$$U_{ijk} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k} = \begin{cases} 0 A_{j-1} Q_{j-1} A_{k-1} Q_{k-1} A_i & \text{si } i \geq k \geq j \\ 0 A_{k-1} Q_{k-1} A_{j-1} Q_{j-1} A_i & \text{si } i \geq j \geq k \\ \mathbf{0}_{(4 \times 4)} & \text{si } k > i \text{ o } j > i \end{cases}$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ si la articulación } i \text{ es de rotación}$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ si la articulación } i \text{ es de traslación}$$



L5. Calcular las matrices de pseudoinercias  $J_i$ .

$$J_i = \begin{bmatrix} \int_i x_i^2 dm & \int_i x_i y_i dm & \int_i x_i z_i dm & \int_i x_i dm \\ \int_i y_i x_i dm & \int_i y_i^2 dm & \int_i y_i z_i dm & \int_i y_i dm \\ \int_i z_i x_i dm & \int_i z_i y_i dm & \int_i z_i^2 dm & \int_i z_i dm \\ \int_i x_i dm & \int_i y_i dm & \int_i z_i dm & \int_i dm \end{bmatrix}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Algoritmo de Lagrange

L6. Calcular la matriz de inercia  $\mathbf{M}$  (nxn) donde cada término  $m_{ij}$  se calcula como:

$$m_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{Traza}(\mathbf{U}_{kj} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{ki}^T)$$

con  $i, j = 1, 2, \dots, n$

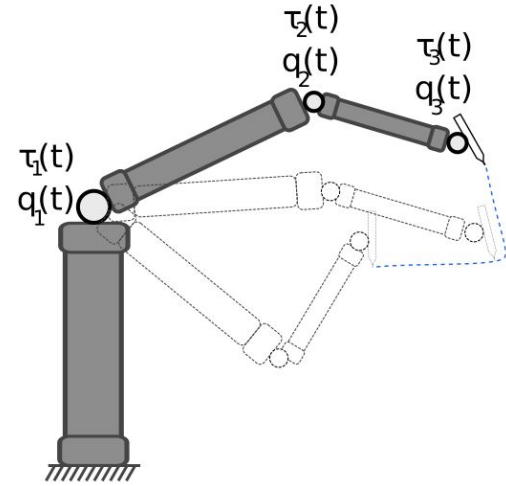
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

L7. Calcular los términos  $c_{ikm}$  que ayudaran a armar el vector de coriolis  $\mathbf{C}$ .

$$c_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{Traza}(\mathbf{U}_{jkm} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T) \quad \text{con } i, k, m = 1, 2, \dots, n$$

L8. Calcular el vector de fuerzas de coriolis  $\mathbf{C}$  donde cada entrada  $i$  es  $c_i$ :

$$c_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n c_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}$$



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Algoritmo de Lagrange

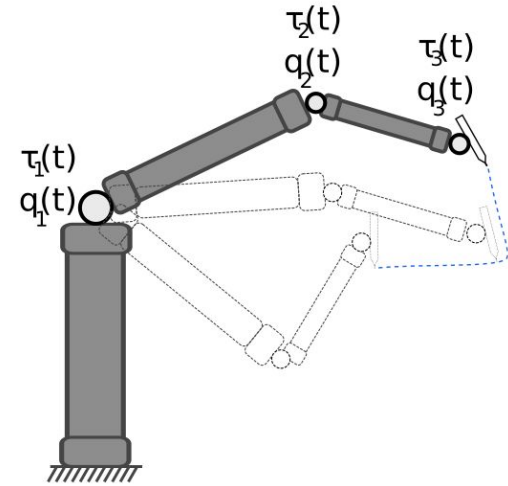
**L9.** Calcular el vector de fuerzas gravitatorias  $\mathbf{G}$ , cuyas entradas  $g_i$  son:

$$g_i = \sum_{j=1}^n (-m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{ji} {}^j \mathbf{r}_j) \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_{x0} \\ g_{y0} \\ g_{z0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

Donde  $\mathbf{g}$  es el vector de gravedad en la base  $\{S_0\}$  y  ${}^j \mathbf{r}_j$  es el vector de coordenadas homogéneas que apunta al centro de masa del elemento  $j$ , expresado en la base  $i$ .

**L10.** Conformar la ecuación del modelo dinámico:

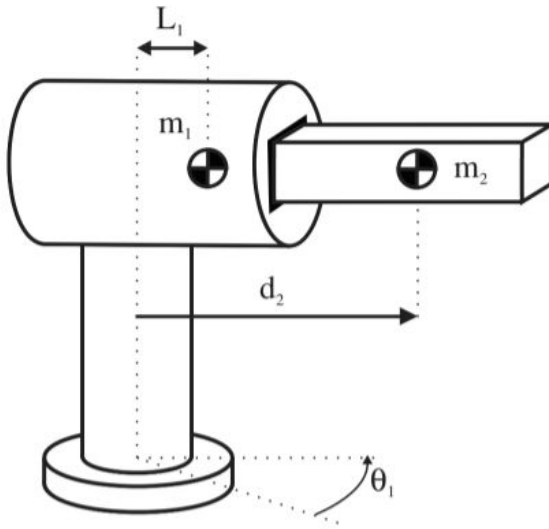
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q}) + \mathbf{G}(q)$$





## Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

### *Ejemplo - Formulación Lagrangiana*

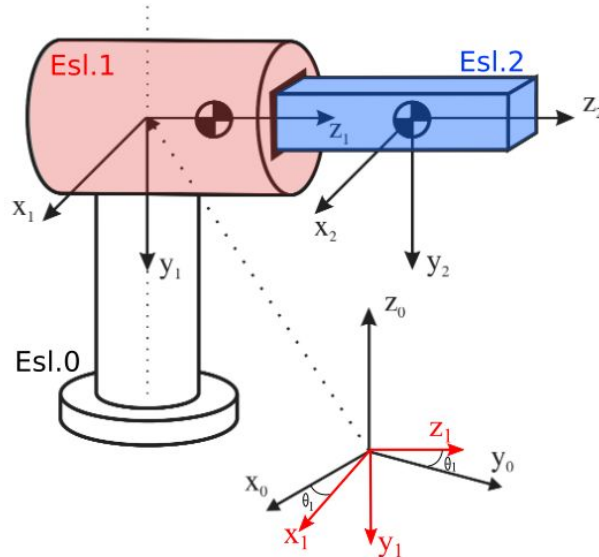


- Robot con eslabones rígidos
- Tramo recto vertical fijo
- Primer articulación: de rotación
- Segunda articulación: de traslación
- Peso  $m_1$  a una distancia  $L_1$
- Peso  $m_2$  a una distancia  $d_2$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L1. Asignar a cada eslabón un sistema de referencia de acuerdo a las normas de DH.



Parámetros de DH para cada articulación

| Articulación | $\theta_i$ | $d_i$ | $a_i$ | $\alpha_i$ |
|--------------|------------|-------|-------|------------|
| 1            | $\theta_1$ | 0     | 0     | -90        |
| 2            | 0          | $d_2$ | 0     | 0          |

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

## Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L2. Calcular las matrices de transformación  ${}_{i-1}A_i$  para cada eslabón i.

Parámetros de DH para cada articulación

$${}_{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

| Articulación | $\theta_i$ | $d_i$ | $a_i$ | $\alpha_i$ |
|--------------|------------|-------|-------|------------|
| 1            | $\theta_1$ | 0     | 0     | -90        |
| 2            | 0          | $d_2$ | 0     | 0          |

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_2 = {}^0A_1 {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2 S\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & d_2 C\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L3. Calcular las matrices  $U_{ij}$

$$U_{11} = \frac{\partial_0 A_1}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{12} = \frac{\partial_0 A_1}{\partial d_2} = [0]$$

$$U_{21} = \frac{\partial_0 A_2}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2 C\theta_1 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = \frac{\partial_0 A_2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_2 = {}^0A_1 {}^1A_2 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2 S\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & d_2 C\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L4. Calcular las matrices  $U_{ijk}$

$$U_{111} = \frac{\partial U_{11}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{121} = \frac{\partial U_{12}}{\partial \theta_1} = [0]$$

$$U_{211} = \frac{\partial U_{21}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & d_2 S\theta_1 \\ -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2 C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{221} = \frac{\partial U_{22}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{112} = \frac{\partial U_{11}}{\partial d_2} = [0]$$

$$U_{122} = \frac{\partial U_{12}}{\partial d_2} = [0]$$

$$U_{212} = \frac{\partial U_{21}}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{222} = \frac{\partial U_{22}}{\partial d_2} = [0]$$

$$U_{11} = \frac{\partial_0 A_1}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_{12} = \frac{\partial_0 A_1}{\partial d_2} = [0]$$

$$U_{21} = \frac{\partial_0 A_2}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2 C\theta_1 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_{22} = \frac{\partial_0 A_2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

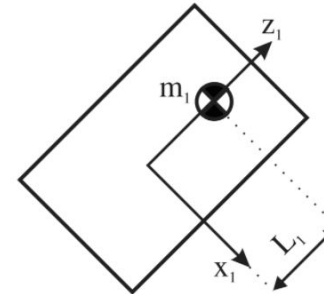
## Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L5. Calcular las matrices de pseudoinercias  $J_i$

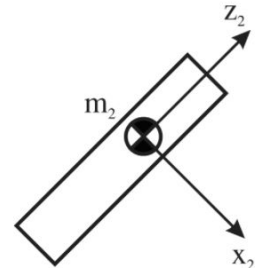
$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 L_1^2 & m_1 L_1 \\ 0 & 0 & m_1 L_1 & m_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \int_i x_i^2 dm & \int_i x_i y_i dm & \int_i x_i z_i dm & \int_i x_i dm \\ \int_i y_i x_i dm & \int_i y_i^2 dm & \int_i y_i z_i dm & \int_i y_i dm \\ \int_i z_i x_i dm & \int_i z_i y_i dm & \int_i z_i^2 dm & \int_i z_i dm \\ \int_i x_i dm & \int_i y_i dm & \int_i z_i dm & \int_i dm \end{bmatrix}$$



Elemento 1



Elemento 2

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L6. Calcular las matrices de inercias M

$$m_{11} = \sum_{k=\max(1,1)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{k1} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{k1}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{11} \mathbf{J}_1 \mathbf{U}_{11}^T) + \text{Tr}(\mathbf{U}_{21} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T)$$

$$= \text{Tr} \begin{bmatrix} C_1^2 L_1^2 m_1 & S_1 C_1 L_1^2 m_1 & 0 & 0 \\ C_1 S_1 L_1^2 m_1 & S_1^2 L_1^2 m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \text{Tr} \begin{bmatrix} C_1^2 d_2^2 m_2 & S_1 C_1 d_2^2 m_2 & 0 & 0 \\ S_1 C_1 d_2^2 m_2 & S_1^2 d_2^2 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (C_1^2 + S_1^2) m_1 L_1^2 + (C_1^2 + S_1^2) d_2^2 m_2 = \boxed{m_1 L_1^2 + m_2 d_2^2}$$

$$m_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{Traza}(\mathbf{U}_{kj} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{ki}^T)$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 L_1^2 & m_1 L_1 \\ 0 & 0 & m_1 L_1 & m_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{11} = \frac{\partial_0 \mathbf{A}_1}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_{12} = \frac{\partial_0 \mathbf{A}_1}{\partial d_2} = [0]$$

$$\mathbf{U}_{21} = \frac{\partial_0 \mathbf{A}_2}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2 C\theta_1 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{22} = \frac{\partial_0 \mathbf{A}_2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L6. Calcular las matrices de inercias M

$$m_{12} = \sum_{k=\max(1,2)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{k2} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{k1}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{22} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T)$$

$$= \text{Tr} \begin{bmatrix} S_1 C_1 d_2 m_2 & S_1^2 d_2 m_2 & 0 & 0 \\ -C_1^2 d_2 m_2 & -S_1 C_1 d_2 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1 C_1 d_2 m_2 - S_1 C_1 d_2 m_2 = 0$$

$$m_{21} = \sum_{k=\max(2,1)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{k1} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{k2}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{21} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T)$$

$$= \text{Tr} \begin{bmatrix} S_1 C_1 d_2 m_2 & -C_1^2 d_2 m_2 & 0 & 0 \\ S_1^2 d_2 m_2 & -S_1 C_1 d_2 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1 C_1 d_2 m_2 - S_1 C_1 d_2 m_2 = 0$$

$$m_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{Traza}(\mathbf{U}_{kj} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{ki}^T)$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 L_1^2 & m_1 L_1 \\ 0 & 0 & m_1 L_1 & m_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{11} = \frac{\partial_0 \mathbf{A}_1}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_{12} = \frac{\partial_0 \mathbf{A}_1}{\partial d_2} = [0]$$

$$\mathbf{U}_{21} = \frac{\partial_0 \mathbf{A}_2}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2 C\theta_1 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{22} = \frac{\partial_0 \mathbf{A}_2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L6. Calcular las matrices de inercias M

$$m_{22} = \sum_{k=\max(2,2)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{k2} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{k2}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{22} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T)$$

$$= \text{Tr} \begin{bmatrix} S_1^2 m_2 & -S_1 C_1 m_2 & 0 & 0 \\ -S_1 C_1 m_2 & C_1^2 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1^2 m_2 + C_1^2 m_2 = m_2$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 L_1^2 + m_2 d_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$m_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n \text{Traza}(\mathbf{U}_{kj} \mathbf{J}_k \mathbf{U}_{ki}^T)$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 L_1^2 & m_1 L_1 \\ 0 & 0 & m_1 L_1 & m_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{11} = \frac{\partial_0 \mathbf{A}_1}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_{12} = \frac{\partial_0 \mathbf{A}_1}{\partial d_2} = [0]$$

$$\mathbf{U}_{21} = \frac{\partial_0 \mathbf{A}_2}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2 C\theta_1 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{22} = \frac{\partial_0 \mathbf{A}_2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L7. Calcular los términos  $c_{ikm}$  que ayudaran a armar el vector de coriolis C.

$$\begin{aligned}
 c_{111} &= \sum_{j=\max(1,1,1)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{j11} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{j1}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{111} \mathbf{J}_1 \mathbf{U}_{11}^T) + \text{Tr}(\mathbf{U}_{211} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) \\
 &= \text{Tr} \begin{bmatrix} -C_1 S_1 m_1 L_1^2 & -S_1^2 m_1 L_1^2 & 0 & 0 \\ C_1^2 m_1 L_1^2 & C_1 S_1 m_1 L_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \text{Tr} \begin{bmatrix} -S_1 C_1 d_2^2 m_2 & -S_1^2 d_2^2 m_2 & 0 & 0 \\ C_1^2 d_2^2 m_2 & S_1 C_1 d_2^2 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= -C_1 S_1 m_1 L_1^2 + C_1 S_1 m_1 L_1^2 - d_2^2 S_1 C_1 m_2 + d_2^2 S_1 C_1 m_2 = 0
 \end{aligned}$$

$$c_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{Traza}(\mathbf{U}_{jkm} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T) \quad \text{con } i, k, m = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 L_1^2 & m_1 L_1 \\ 0 & 0 & m_1 L_1 & m_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{11} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_{21} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2 C\theta_1 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{111} = \begin{bmatrix} -C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_{211} = \begin{bmatrix} -C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & d_2 S\theta_1 \\ -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2 C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L7. Calcular los términos  $c_{ikm}$  que ayudaran a armar el vector de coriolis C.

$$\begin{aligned}
 c_{112} &= \sum_{j=\max(1,1,2)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{j12} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{j1}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{212} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) \\
 &= \text{Tr} \begin{bmatrix} C_1^2 d_2 m_2 & S_1 C_1 d_2 m_2 & 0 & 0 \\ S_1 C_1 d_2 m_2 & S_1^2 d_2 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C_1^2 d_2 m_2 + S_1^2 d_2 m_2 = \boxed{d_2 m_2}
 \end{aligned}$$

$$c_{121} = \sum_{j=\max(1,2,1)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{j21} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{j1}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{221} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T)$$

$$\text{como: } \mathbf{U}_{221} = \mathbf{U}_{212} \rightarrow c_{121} = c_{112} = \boxed{d_2 m_2}$$

$$c_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{Traza}(\mathbf{U}_{jkm} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T) \quad \text{con } i, k, m = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 L_1^2 & m_1 L_1 \\ 0 & 0 & m_1 L_1 & m_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{21} = \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2 C\theta_1 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{221} = \mathbf{U}_{212} = \frac{\partial \mathbf{U}_{21}}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L7. Calcular los términos  $c_{ikm}$  que ayudaran a armar el vector de coriolis C.

$$c_{211} = \sum_{j=\max(2,1,1)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{j11} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{j2}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{211} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T)$$

$$= \text{Tr} \begin{bmatrix} -S_1^2 d_2 m_2 & S_1 C_1 d_2 m_2 & 0 & 0 \\ S_1 C_1 d_2 m_2 & -C_1^2 d_2 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1^2 d_2 m_2 - C_1^2 d_2 m_2 = \boxed{-d_2 m_2}$$

$$c_{122} = \sum_{j=\max(1,2,2)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{j22} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{j1}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{222} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{21}^T) = \boxed{0}$$

$$c_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{Traza}(\mathbf{U}_{jkm} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T) \quad \text{con } i, k, m = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 L_1^2 & m_1 L_1 \\ 0 & 0 & m_1 L_1 & m_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = \frac{\partial_0 A_2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_{222} = \frac{\partial U_{22}}{\partial d_2} = [0]$$

$$U_{211} = \frac{\partial U_{21}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & d_2 S\theta_1 \\ -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2 C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L7. Calcular los términos  $c_{ikm}$  que ayudaran a armar el vector de coriolis C.

$$c_{212} = \sum_{j=\max(2,1,2)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{j12} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{j2}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{212} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T)$$

$$= \text{Tr} \begin{bmatrix} S_1 C_1 m_2 & -C_1^2 m_2 & 0 & 0 \\ S_1^2 m_2 & -S_1 C_1 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1 C_1 m_2 - C_1 S_1 m_2 = 0$$

$$c_{221} = \sum_{j=\max(2,2,1)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{j21} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{j2}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{221} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T)$$

como:  $\mathbf{U}_{221} = \mathbf{U}_{212} \rightarrow c_{221} = c_{22} = 0$

$$c_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{Traza}(\mathbf{U}_{jkm} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T) \quad \text{con } i, k, m = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 L_1^2 & m_1 L_1 \\ 0 & 0 & m_1 L_1 & m_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{22} = \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{212} = \frac{\partial \mathbf{U}_{21}}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L7. Calcular los términos  $c_{ikm}$  que ayudaran a armar el vector de coriolis C.

$$c_{222} = \sum_{j=\max(2,2,2)}^2 \text{Traza}(\mathbf{U}_{j22} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{j2}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U}_{222} \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_{22}^T) = 0$$

$$c_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{Traza}(\mathbf{U}_{jkm} \mathbf{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T) \quad \text{con } i, k, m = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 L_1^2 & m_1 L_1 \\ 0 & 0 & m_1 L_1 & m_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{22} = \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -s\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & c\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{222} = \frac{\partial \mathbf{U}_{22}}{\partial d_2} = [0]$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L8. Calcular el vector de fuerzas de coriolis  $\mathbf{C}$

$$c_1 = \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 c_{1km} \dot{q}_k \dot{q}_m = c_{111} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + c_{112} \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + c_{121} \dot{d}_2 \dot{\theta}_1 + c_{122} \dot{d}_2 \dot{d}_2$$

$$= 0 \cdot \dot{\theta}_1^2 + 2d_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + 0 \dot{d}_2^2 = \boxed{2d_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2}$$

$$c_2 = \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 c_{2km} \dot{q}_k \dot{q}_m = c_{211} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + c_{212} \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + c_{221} \dot{d}_2 \dot{\theta}_1 + c_{222} \dot{d}_2 \dot{d}_2$$

$$= -d_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 + 2 \cdot 0 \cdot \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + 0 \dot{d}_2^2 = \boxed{-d_2 m_2 \dot{\theta}_1^2}$$

$$c_i = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n c_{ikm} \dot{q}_k \dot{q}_m$$

$$\begin{aligned} h_{111} &= 0 & h_{112} &= d_2 m_2 \\ h_{121} &= d_2 m_2 & h_{122} &= 0 \\ h_{211} &= -d_2 m_2 & h_{212} &= 0 \\ h_{221} &= 0 & h_{222} &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2d_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -d_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L9. Calcular el vector de fuerzas gravitatorias  $\mathbf{G}$

Recordando que  ${}^j\mathbf{r}_j$  es el vector de coordenadas homogéneas de posición del centro de masa del eslabón  $j$  expresado en el sistema  $j$ , se tiene:

$$g_1 = \sum_{j=1}^2 (-m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{j1} {}^j\mathbf{r}_j) = -m_1 \mathbf{g} \mathbf{U}_{11} {}^1\mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{g} \mathbf{U}_{21} {}^2\mathbf{r}_2$$

$${}^1\mathbf{r}_1 = [0, 0, L_1, 1]$$

$${}^2\mathbf{r}_2 = [0, 0, 0, 1]$$

$$= -m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \\ 1 \end{bmatrix} - m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & -C_1 & -d_2 C_1 \\ C_1 & 0 & -S_1 & -d_2 S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{0}$$

$$g_2 = \sum_{j=1}^2 (-m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{j2} {}^j\mathbf{r}_j) = -m_1 \mathbf{g} \mathbf{U}_{12} {}^1\mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{g} \mathbf{U}_{22} {}^2\mathbf{r}_2$$

$$= -m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \\ 1 \end{bmatrix} - m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S_1 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{0}$$

$$g_i = \sum_{j=1}^n (-m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{ji} {}^j\mathbf{r}_j) \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \text{ en } S_0 \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

$$U_{11} = \frac{\partial {}^0A_1}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_{12} = \frac{\partial {}^0A_1}{\partial d_2} = [0]$$

$$U_{21} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2 C\theta_1 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



# Modelo dinámico - Robot rígido multiarticular

Útil

## Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L10. Conformar la ecuación del modelo dinámico:

$$\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q)$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 L_1^2 + m_2 d_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2d_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -d_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} T_1 = (m_1 L_1^2 + m_2 d_2^2) \ddot{\theta}_1 + 2d_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ F_2 = m_2 \ddot{d}_2 - d_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 \end{cases}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 L_1^2 + m_2 d_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2d_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -d_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

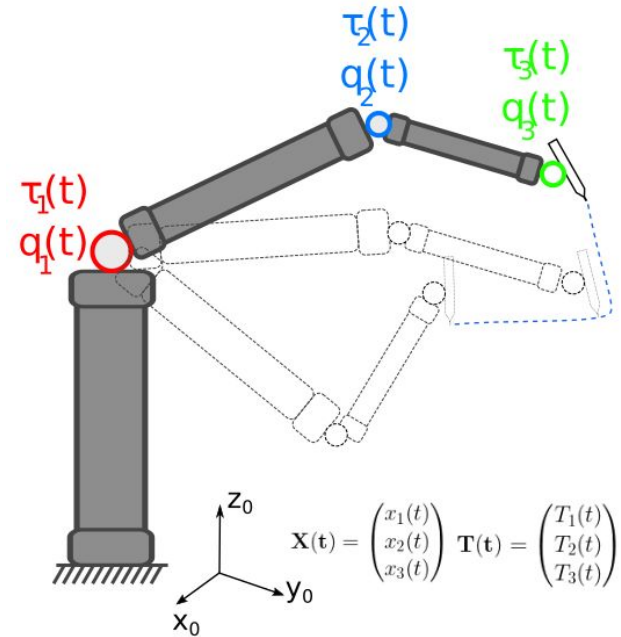
$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Modelo dinámico en el espacio de la tarea

El modelo dinámico hasta ahora relaciona las coordenadas articulares con los pares y fuerzas que estas desarrollan. No obstante, en ocasiones es conveniente tener el modelo dinámico expresado en el mismo sistema del **espacio de la tarea**.

El espacio de la tarea es el lugar en donde se desarrolla el trabajo, y por lo tanto es el ambiente referenciado con un sistema cartesiano fijo, en el cual se lleva a cabo el objetivo del robot.

En otras palabras, es describir todos los datos ( trayectorias, fuerzas, pares, etc) en el sistema de coordenadas fijo del entorno de trabajo  $[X(t), V(t), A(t), T(t)]$



# Modelo dinámico en el espacio de la tarea

Recordando que el vector de velocidades lineales y angulares del extremo del robot  $\dot{\mathbf{x}}$  se relaciona con el vector de velocidades articulares  $\dot{\mathbf{q}}$  a partir de la matriz jacobiana  $\mathbf{J}$ , como sigue:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_x, \dot{x}_y, \dot{x}_z, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y, \dot{\theta}_z]^T$$

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$$

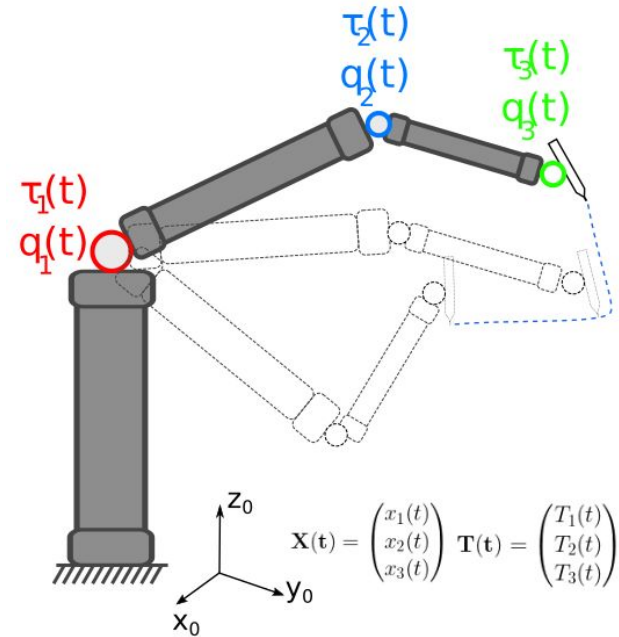
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$$

Y también que la potencia es indiferente del referencial que se esté considerando, lo que significa que:

$$\mathbf{T}^T \dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\tau}^T \dot{\mathbf{q}}$$

Se obtiene que:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{T}$$



# Modelo dinámico en el espacio de la tarea

Utilizando la igualdad hallada:  $\tau = \mathbf{J}^T \mathbf{T}$  y la derivada:

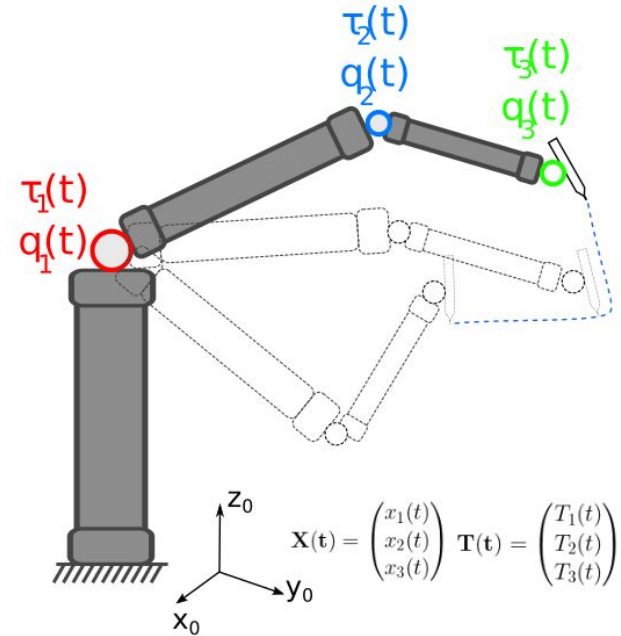
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}}$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}}$$

en la ecuación matricial del modelo dinámico que se presenta en la siguiente forma:

$$\tau = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q})$$



# Modelo dinámico en el espacio de la tarea

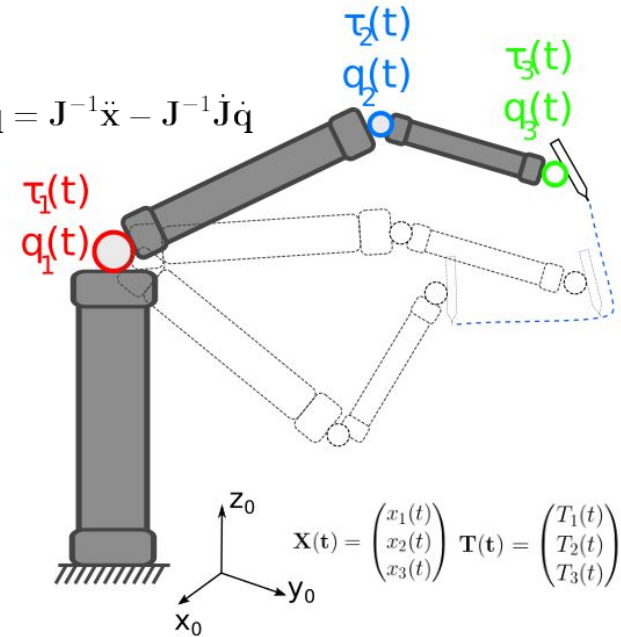
Utilizando la igualdad hallada:  $\tau = \mathbf{J}^T \mathbf{T}$  y la derivada de:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$   
 $\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}} \longrightarrow \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}}$

en la ecuación matricial del modelo dinámico que se presenta en la siguiente forma:

$$\tau = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q})$$

Se puede deducir:

$$\mathbf{J}^T \mathbf{T} = \mathbf{M} \mathbf{J}^{-1} \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{M} \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} + \mathbf{G}$$



# Modelo dinámico en el espacio de la tarea

Utilizando la igualdad hallada:  $\tau = \mathbf{J}^T \mathbf{T}$  y la derivada de:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$   
 $\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}} \longrightarrow \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}}$

en la ecuación matricial del modelo dinámico que se presenta en la siguiente forma:

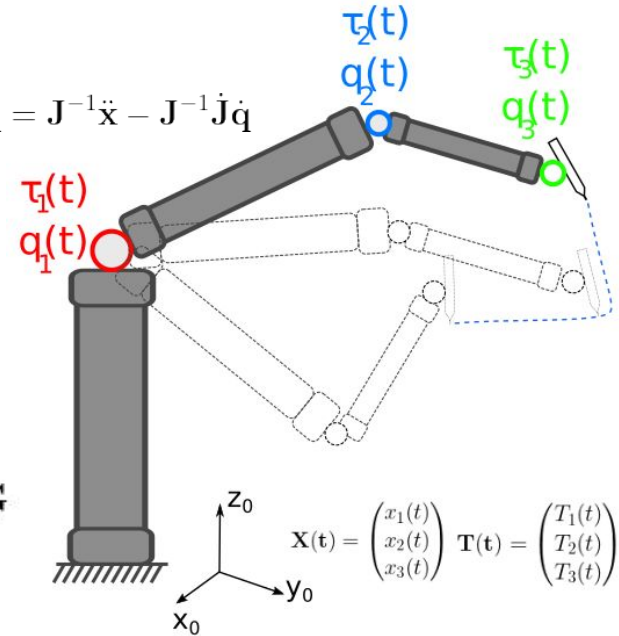
$$\tau = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q})$$

Se puede deducir:

$$\mathbf{J}^T \mathbf{T} = \mathbf{M} \mathbf{J}^{-1} \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{M} \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} + \mathbf{G}$$

Despejando  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T} = (\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{M} \mathbf{J}^{-1} \ddot{\mathbf{x}} - (\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{M} \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{C} + (\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{G}$$



# Modelo dinámico en el espacio de la tarea

Utilizando la igualdad hallada:  $\tau = \mathbf{J}^T \mathbf{T}$  y la derivada de:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$   
 $\ddot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}} \longrightarrow \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1} \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}}$

en la ecuación matricial del modelo dinámico que se presenta en la siguiente forma:

$$\tau = \mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q})$$

Se puede deducir:

$$\mathbf{J}^T \mathbf{T} = \mathbf{M} \mathbf{J}^{-1} \ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{M} \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} + \mathbf{G}$$

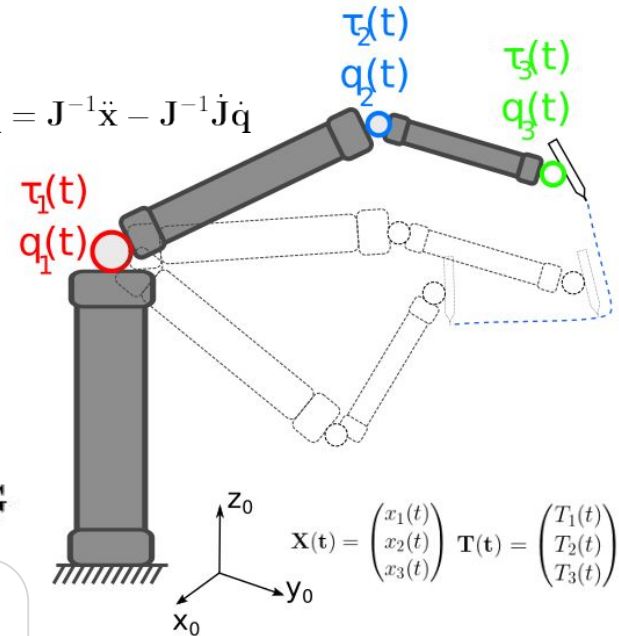
Despejando  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T} = (\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{M} \mathbf{J}^{-1} \ddot{\mathbf{x}} - (\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{M} \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{C} + (\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{G}$$

Llegando al **Modelo en el espacio de la tarea**:

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}_j \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_j + \mathbf{G}_j$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}_j = (\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{M} \mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{C}_j = (\mathbf{J}^T)^{-1} (\mathbf{C} - \mathbf{M} \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{G}_j = (\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{G} \end{cases}$$



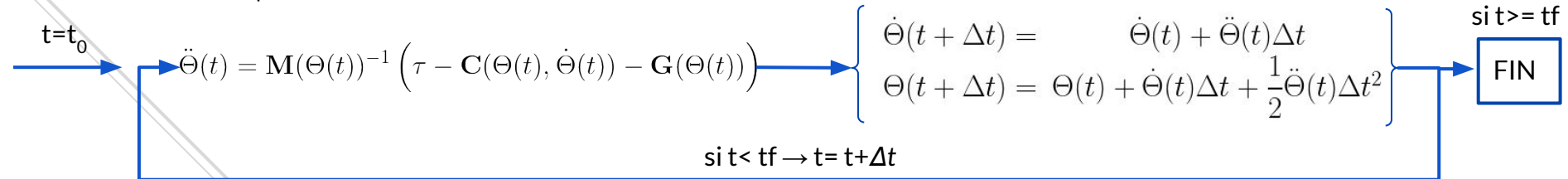
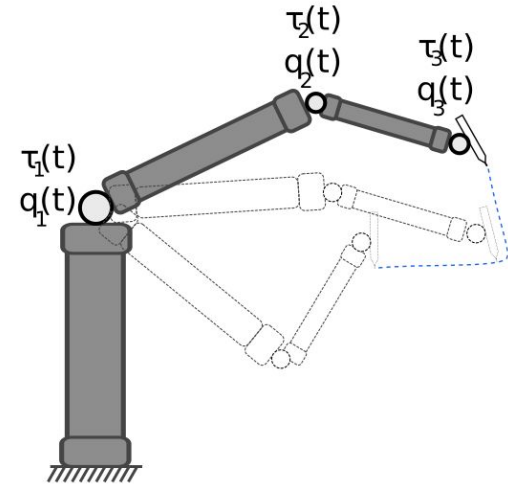
## Simulación dinámica

Para simular el movimiento de un manipulador, será imposible en la gran mayoría de los casos resolver las ecuaciones de movimiento analíticamente, por lo que se deberá hacer uso de alguno de los métodos de integración numérica existente.

Como método básico se explicará la **integración de Euler (hacia adelante)** existiendo métodos más sofisticados que son recomendados para obtener resultados más precisos.

Este método se obtiene a partir de utilizar una expansión en serie de Taylor para la posición  $\theta(t)$  y la velocidad  $\dot{\theta}(t)$  para aproximar  $\theta(t + \Delta t)$ ,  $\dot{\theta}(t + \Delta t)$  en función de los datos conocidos en un tiempo  $t$ .

Sea entonces  $\Delta t$  el tiempo entre el instante  $t$  y el tiempo en el que quiero conocer la posición y la velocidad y asumiendo que conocemos el modelo dinámico del sistema, se tiene que:

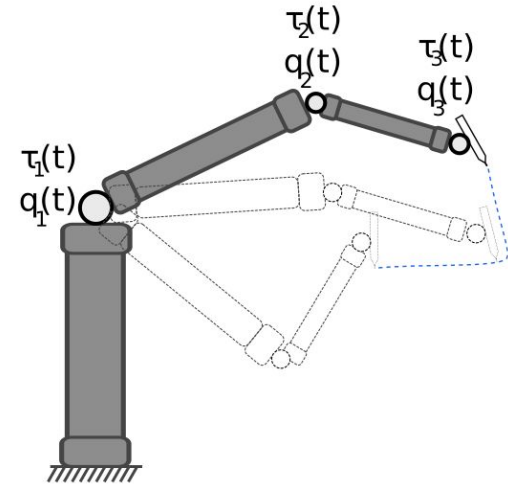




# Simulación dinámica

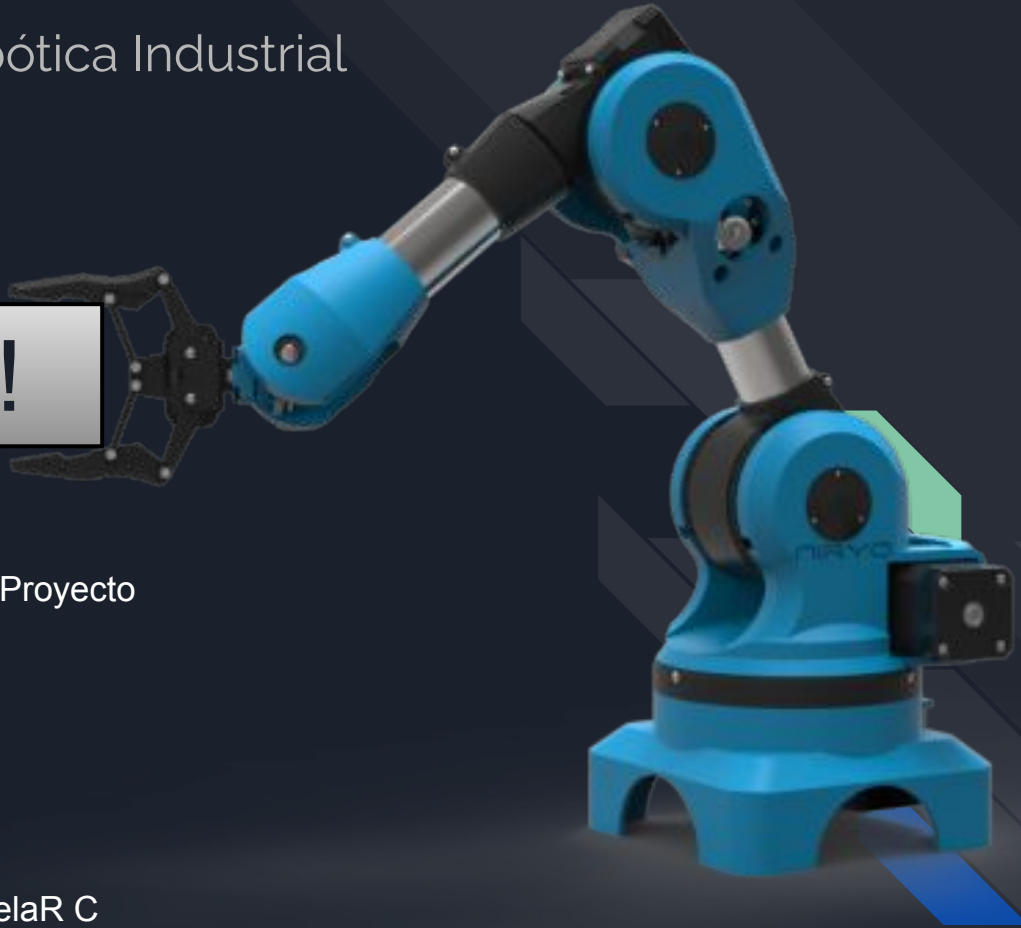
## *Comentarios sobre Euler hacia adelante*

- Es un método explícito
- Su comportamiento es condicionalmente estable, lo que significa que converge dependiendo de el Time-Step que se utilice ( $\Delta t$ ).
- Se pueden desacoplar las matrices puesto que se tienen todos los datos del estado ( $t$ ) para resolver el estado  $t+\Delta t$ .
- Para métodos incondicionalmente estables (que permiten  $\Delta t$  mayores) se necesitan métodos implícitos, lo que complejiza la resolución xq no se pueden desacoplar las ecuaciones como en este caso.
- En el implícito, no se poseen todos los datos para resolver  $t+\Delta t$ , por lo que hay que resolver el problema matricialmente, todo el “mismo tiempo”.



# FRI - Fundamentos de Robótica Industrial

FIN!



Todo listo para realizar la **Entrega 3** del Proyecto

Saben lo que es Google Colab?

Próximas clases:

- Martes: en salas de máquinas UdelaR C
- Jueves: en salas de máquinas UdelaR C