UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY
FACULTAD DE INGENIERIA
IIMPI
INSTITUTO DE INGENIERIA MECANICA Y PRODUCCION INDUSTRIAL

DINÁMICA | Lagrange

Fundamentos de Robótica Industrial

Versión 2024

Introducción

La ***dinámica*** es la rama de la física que se ocupa de estudiar la ***evolución en el tiempo*** de un sistema físico y las ***causas*** que provocan sus alteraciones.

Esta área incluye:

- La ***cinemática:*** estudio de la geometría del movimiento, relacionando desplazamientos, velocidades y aceleraciones, con las características geométricas del sistema.
- La ***cinética:*** estudio de la relación que existe entre las fuerzas que actúan sobre un sistema, su masa (y la distribución) y el movimiento del mismo.

No obstante, es habitual encontrar como ***dinámica del robot,*** al estudio de la relación entre las fuerzas que actúan sobre un sistema y el movimiento que en él se producen (i.e. cinética).

Introducción

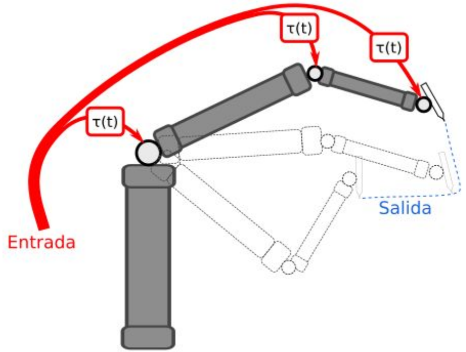
La dinámica del robot quedará establecida mediante el denominado ***modelo dinámico***, que establece la relación matemática entre:

1. La localización del robot definida por:
   a. Sus variables articulares y sus derivadas
   b. ó por la localización de su extremo y sus derivadas
2. Las fuerzas y los pares:
   a. Articulares
   b. o en su extremo
3. Los parámetros dimensionales del robot:
   a. Longitudes
   b. Masas
   c. Inercias

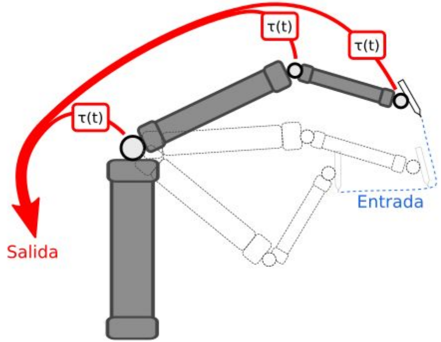
Introducción

Al igual que en la cinemática, se definirán dos tipos de problemas o modelos:

- El ***modelo dinámico directo:*** que expresa la evolución temporal de las coordenadas articulares del robot en función de las fuerzas y pares que intervienen: $\theta(t) = f(\tau(t))$



- El ***modelo dinámico inverso:*** que determina las fuerzas y pares necesarios para conseguir una evolución de las coordenadas articulares determinada: $\tau(t) = g(\theta(t))$



Introducción

Algunos comentarios:

- El planteo y resolución del modelo dinámico de mecanismos de 1 o 2 GDL es manejable, pero al aumentar los GDL, la complejidad crece al punto de no ser posible su planteo de forma cerrada. En estos casos, su planteo debe realizarse de manera iterativa, así como su resolución, esto es, instante a instante.

- Forma cerrada: como un conjunto de ecuaciones diferenciales (generalmente de 2° orden) que su integración permite obtener:
  - La trayectoria del puntero a partir del ingreso de los torques articulares
  - o los torques articulares a partir del ingreso de la trayectoria del puntero.

- Es importante notar que el modelo dinámico **completo** de un robot debe incluir no sólo la dinámica de sus elementos (barras o eslabones) sino también la propia de sus sistemas de transmisión, actuadores, los equipos electrónicos y de mando. Estos elementos incorporan nuevas inercias, rozamientos, saturaciones, aumentando aún más su complejidad.

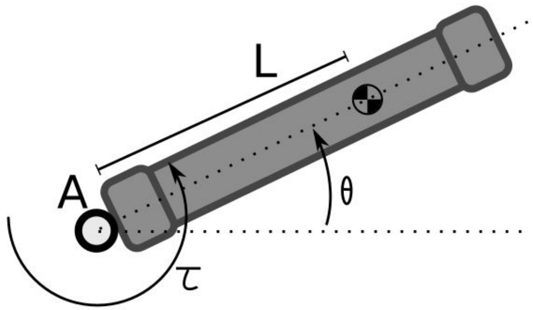
Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

Principalmente existen 2 procedimientos para determinar el modelo dinámico de un robot.

1. El ***método de Newton-Euler,*** que se basa en la aplicación de la primera y la segunda ley de Newton.
2. La ***formulación Lagrangiana***, que se basa en consideraciones energéticas.

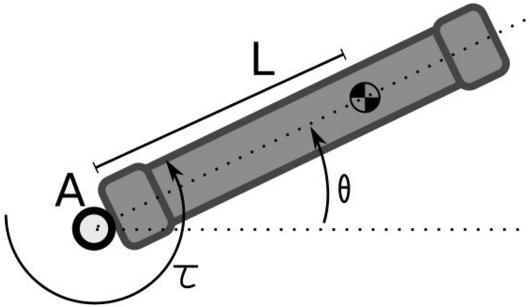
Consideremos el siguiente ejemplo:

- un robot rígido,
- articulado en **A**,
- peso **m** uniformemente distribuido,
- distancia al centro de masa **L**,
- par articular **τ**



Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

método de Newton-Euler



Variación de cantidad de movimiento

$$\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\omega) = \mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times (\mathbf{I}\omega)$$

$$\sum F = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

- ω: Velocidad angular
- **I**: Tensor de inercias
- **T**: Torques externos
- F: Fuerzas externas
- m: masa
- v: velocidad

Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

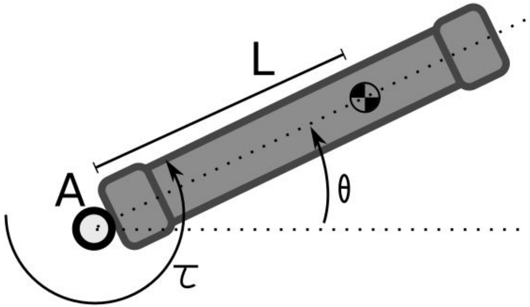
método de Newton-Euler

Variación de cantidad de movimiento

$$\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\omega) = \mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times (\mathbf{I}\omega)$$

$$\sum F = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

- ω: Velocidad angular
- **I**: Tensor de inercias
- **T**: Torques externos
- F: Fuerzas externas
- m: masa
- v: velocidad



Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

método de Newton-Euler

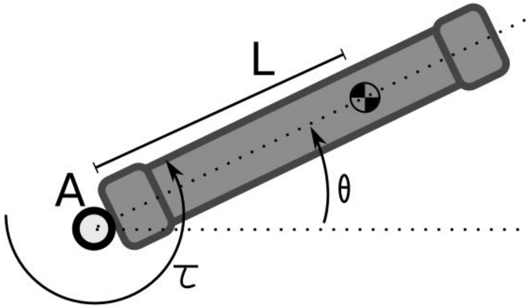
Variación de cantidad de movimiento

$$\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\omega) = \mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times (\mathbf{I}\omega)$$

$$\sum F = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

- ω: Velocidad angular
- **I**: Tensor de inercias
- **T**: Torques externos
- F: Fuerzas externas
- m: masa
- v: velocidad

$$\tau - MgLcos(\theta) = \mathbf{I}\dot{\omega} = \mathbf{I}\ddot{\theta}$$



Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

método de Newton-Euler

Variación de cantidad de movimiento

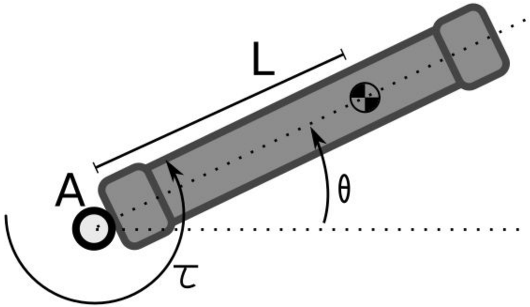
$$\sum \mathbf{T} = \frac{d}{dt}(\mathbf{I}\omega) = \mathbf{I}\dot{\omega} + \omega \times (\mathbf{I}\omega)$$

$$\cancel{\sum F = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})}$$

- ω: Velocidad angular
- **I**: Tensor de inercias
- **T**: Torques externos
- F: Fuerzas externas
- m: masa
- v: velocidad

$$\tau - MgLcos(\theta) = \mathbf{I}\dot{\omega} = \mathbf{I}\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\tau = ML^2\ddot{\theta} + MgLcos(\theta)}$$



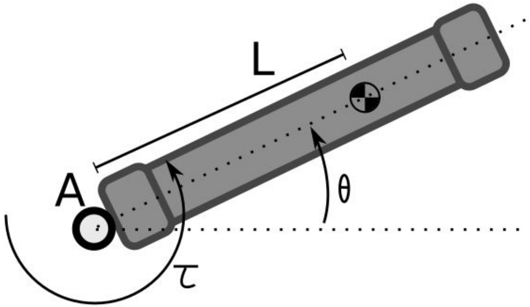
Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

formulación Lagrangiana

$$L = K - U$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- q_i: coordenadas generalizadas
- τ_i: fuerza o par aplicado en el grado de libertad q_i



Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

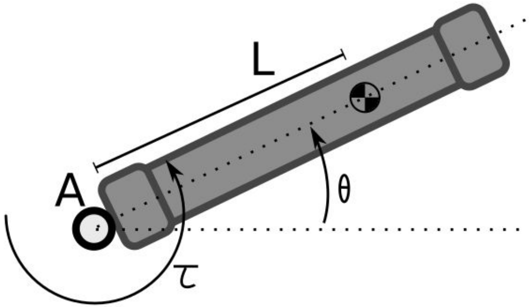
formulación Lagrangiana

$$L = K - U$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

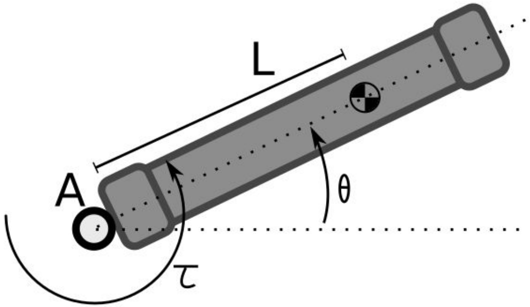
- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- q_i: coordenadas generalizadas
- τ_i: fuerza o par aplicado en el grado de libertad q_i

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2$$



Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

formulación Lagrangiana



$$L = K - U$$

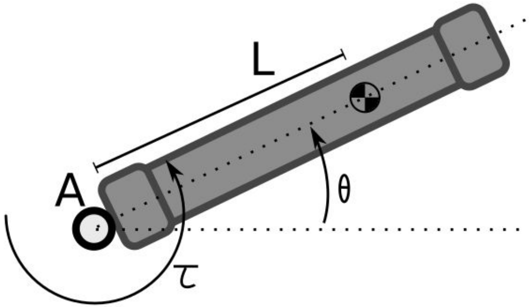
$$\tau_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- q_i: coordenadas generalizadas
- τ_i: fuerza o par aplicado en el grado de libertad q_i

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M L^2 \dot{\theta}^2 \qquad U = Mgh = MgLsen(\theta)$$

Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

formulación Lagrangiana



$$L = K - U$$

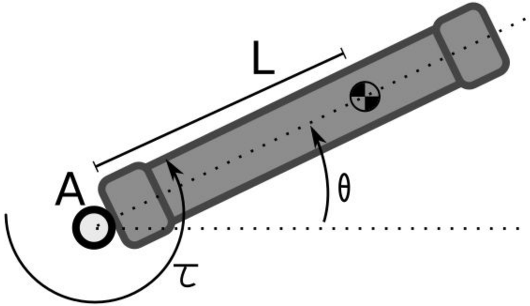
$$\tau_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- q_i: coordenadas generalizadas
- τ_i: fuerza o par aplicado en el grado de libertad q_i

$$K = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 \qquad U = Mgh = MgLsen(\theta) \longrightarrow L = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 - MgLsen(\theta)$$

Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

formulación Lagrangiana



$$L = K - U$$

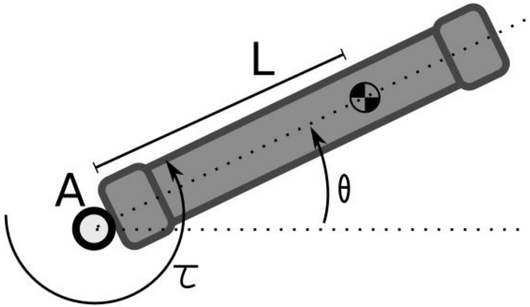
$$\tau_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- q_i: coordenadas generalizadas
- τ_i: fuerza o par aplicado en el grado de libertad q_i

$$K = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 \qquad U = Mgh = MgLsen(\theta) \longrightarrow L = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 - MgLsen(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -MgLcos(\theta)$$

Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular



formulación Lagrangiana

$$L = K - U$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- q_i: coordenadas generalizadas
- τ_i: fuerza o par aplicado en el grado de libertad q_i

$$K = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 \qquad U = Mgh = MgLsen(\theta) \longrightarrow L = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 - MgLsen(\theta)$$

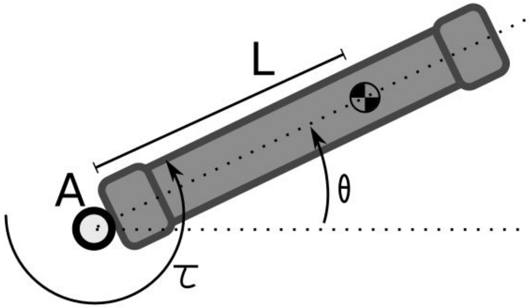
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -MgLcos(\theta) \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ML^2\dot{\theta}$$

Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular

formulación Lagrangiana

$$L = K - U$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

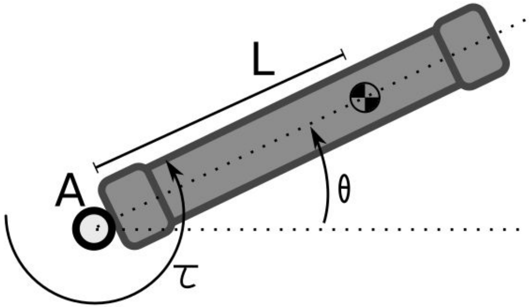


- L: Función Lagrangiana
- K: Energía cinética
- U: Energía potencial
- q_i: coordenadas generalizadas
- τ_i: fuerza o par aplicado en el grado de libertad q_i

$$K = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 \qquad U = Mgh = MgLsen(\theta) \longrightarrow L = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 - MgLsen(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -MgLcos(\theta) \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ML^2\dot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ML^2\ddot{\theta} \longrightarrow \boxed{\tau = ML^2\ddot{\theta} + MgLcos(\theta)}$$

Modelo dinámico - Robot rígido monoarticular



Comentarios

- Plantear el equilibrio de fuerzas de un robot real de varios GDL no es tan simple como el ejercicio de ejemplo. Deben considerarse además de las fuerzas de inercia y de gravedad, las centrípetas y las fuerzas de Coriolis.
- Aunque para el ejemplo, fue más tediosa la resolución al plantear la formulación Lagrangiana que la Newtoniana, con el aumento de los GDL, esta relación se invierte.
- La formulación Lagrangiana conduce de manera sistemática a ecuaciones bien estructuradas donde se pueden identificar las componentes inerciales, las fuerzas de coriolis, las fuerzas centrífugas y las de masa.
- Independientemente del procedimiento para obtener el modelo dinámico del robot, para *n* GDL el modelo se presenta de la siguiente forma:

$$\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q)$$

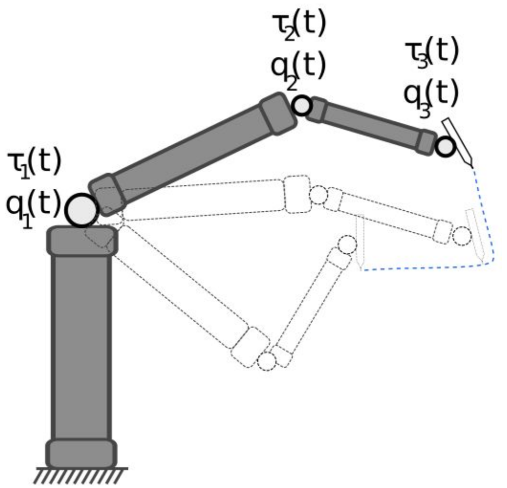
Donde:
q: vector (n) de coordenadas articulares
τ: vector (n) de cargas en cada articulación
M: Matriz (nxn) de inercias
C: Vector de fuerzas de Coriolis + centrífugas
G: Vector de fuerzas gravitatorias

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)

La idea es analizar cada componente de esta teoría para determinar cuáles son los parámetros necesarios a conocer de un robot rígido multiarticular.

Objetivo → Modelo Dinámico: $\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q)$



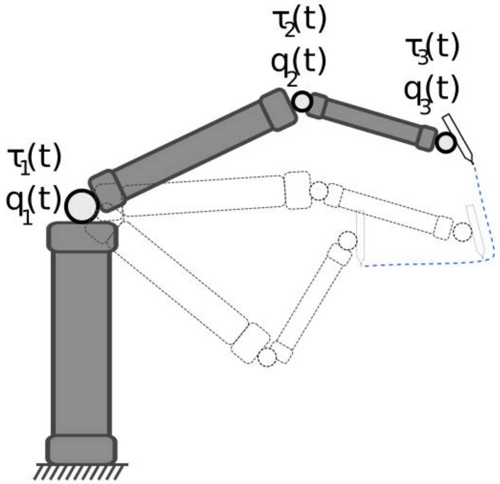
Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)

La idea es analizar cada componente de esta teoría para determinar cuáles son los parámetros necesarios a conocer de un robot rígido multiarticular.

Objetivo → Modelo Dinámico: $$\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q)$$

Teoría → Lagrange (multiarticular): $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$



Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)

La idea es analizar cada componente de esta teoría para determinar cuáles son los parámetros necesarios a conocer de un robot rígido multiarticular.

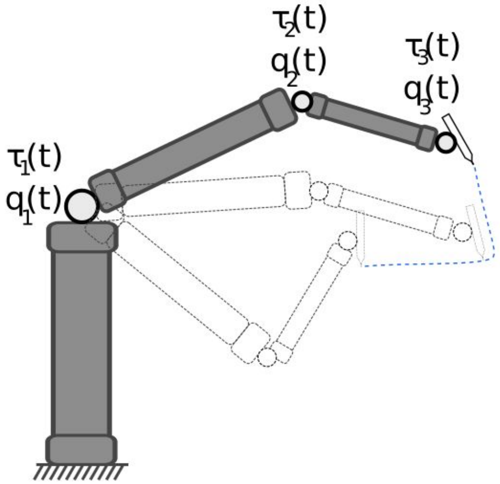
Objetivo → Modelo Dinámico: $\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q)$

Teoría → Lagrange (multiarticular): $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$

Definición → Lagrangiano: $L = K - U$

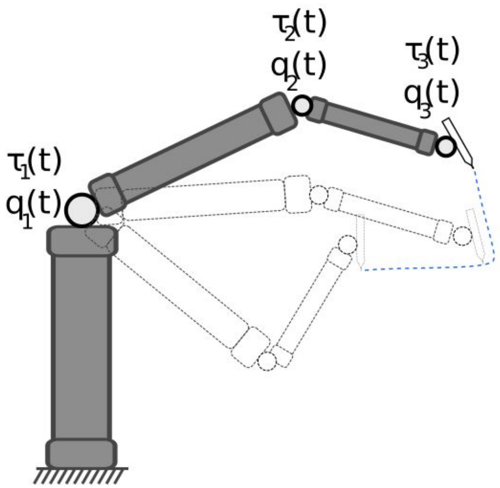
Donde: → K es la Energía cinética

→ U es la Energía Potencial



Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)



La idea es analizar cada componente de esta teoría para determinar cuáles son los parámetros necesarios a conocer de un robot rígido multiarticular.

Objetivo → Modelo Dinámico: $$\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q)$$

Teoría → Lagrange (multiarticular): $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

Definición → Lagrangiano: $$L = K - U$$

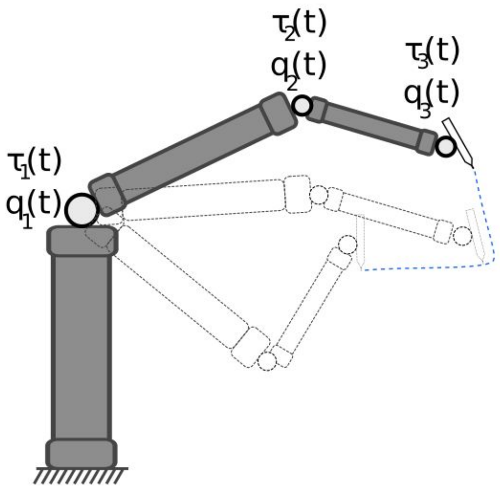
Donde: → K es la Energía cinética

→ U es la Energía Potencial

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)



La idea es analizar cada componente de esta teoría para determinar cuáles son los parámetros necesarios a conocer de un robot rígido multiarticular.

Objetivo → Modelo Dinámico: $\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q)$

Teoría → Lagrange (multiarticular): $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$

Definición → Lagrangiano: $L = K - U$

Donde: → K es la Energía cinética

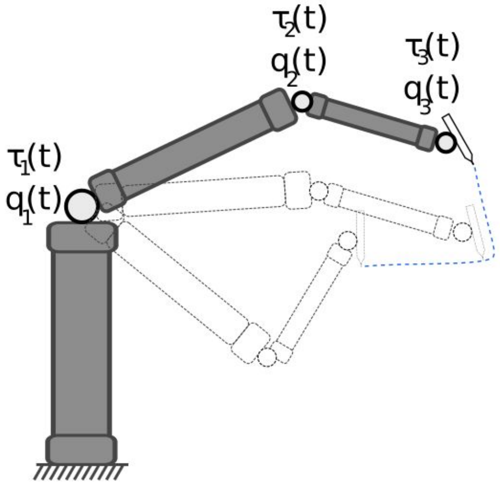
→ U es la Energía Potencial

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q}}_{\text{Fuerzas inerciales}} + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial q}}_{G} = \tau$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)

Analicemos cada término de: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$$

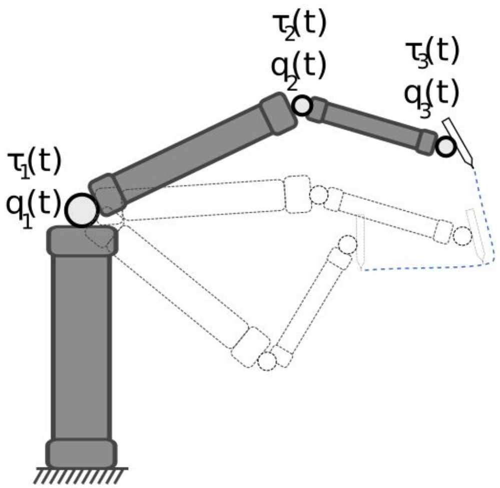


Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)

Analicemos cada término de: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$

considerando que K es la energía cinética: $K =$ ...

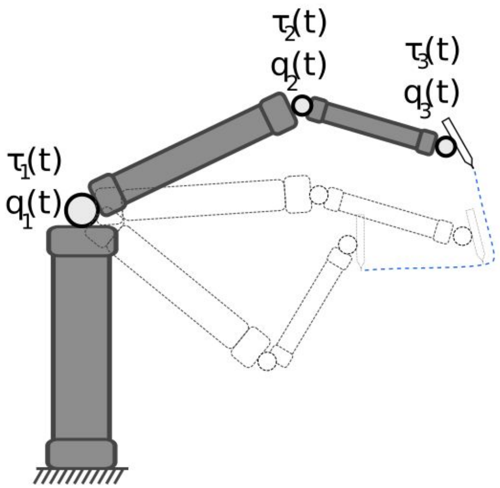


Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)

Analicemos cada término de: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$

considerando que K es la energía cinética: $K = \sum_{i}^{n} K_i = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}$



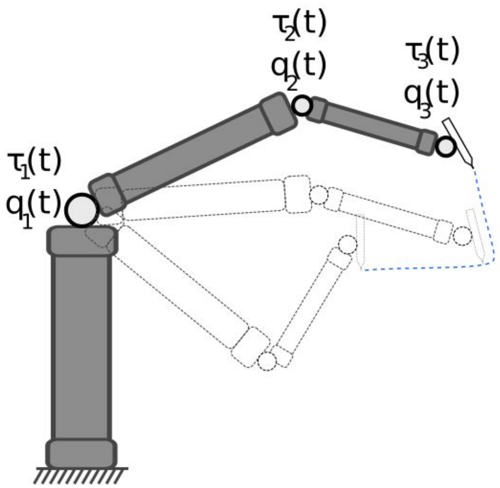
Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)

Analicemos cada término de: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$$

considerando que K es la energía cinética: $$K = \sum_{i}^{n} K_i = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}\right) = \mathbf{M}(q)\dot{q}$$



Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

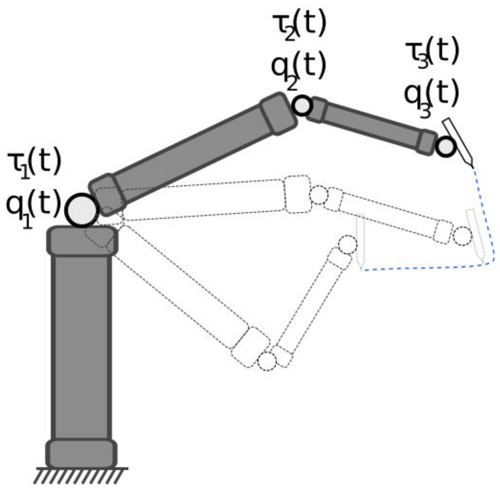
Lagrange (varios eslabones)

Analicemos cada término de: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$

considerando que K es la energía cinética: $K = \sum_{i}^{n} K_i = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}\right) = \mathbf{M}(q)\dot{q}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{M}(q)\dot{q}\right) = \dot{\mathbf{M}}(q)\dot{q} + \mathbf{M}(q)\ddot{q}$$



Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)

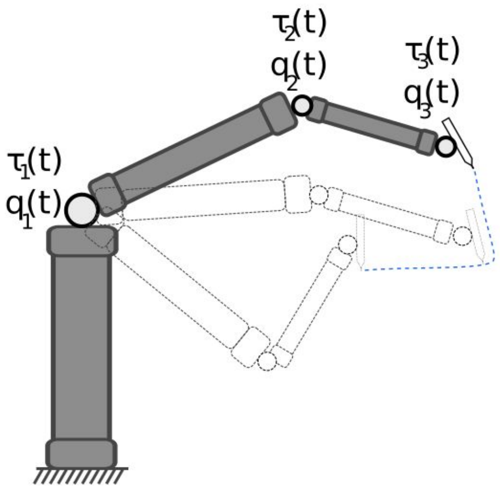
Analicemos cada término de: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$

considerando que K es la energía cinética: $K = \sum_{i}^{n} K_i = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}\right) = \mathbf{M}(q)\dot{q}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{M}(q)\dot{q}\right) = \dot{\mathbf{M}}(q)\dot{q} + \mathbf{M}(q)\ddot{q}$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1}\dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_n}\dot{q} \end{bmatrix}$$



Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)

Analicemos cada término de: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$

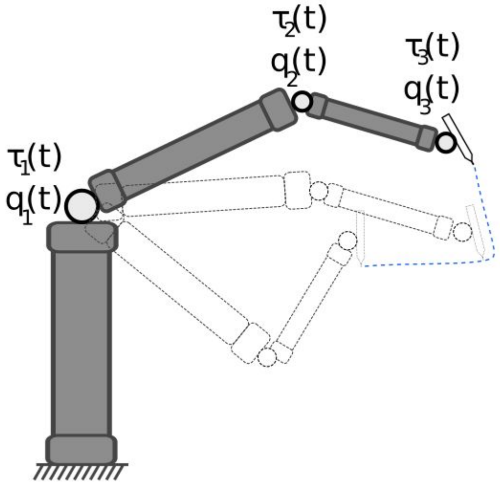
considerando que K es la energía cinética: $K = \sum_{i}^{n} K_i = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}\right) = \mathbf{M}(q)\dot{q}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{M}(q)\dot{q}\right) = \dot{\mathbf{M}}(q)\dot{q} + \mathbf{M}(q)\ddot{q}$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1}\dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_n}\dot{q} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}(q)\ddot{q} + \dot{\mathbf{M}}(q)\dot{q} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1}\dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1}\dot{q} \end{bmatrix} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$$



Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)

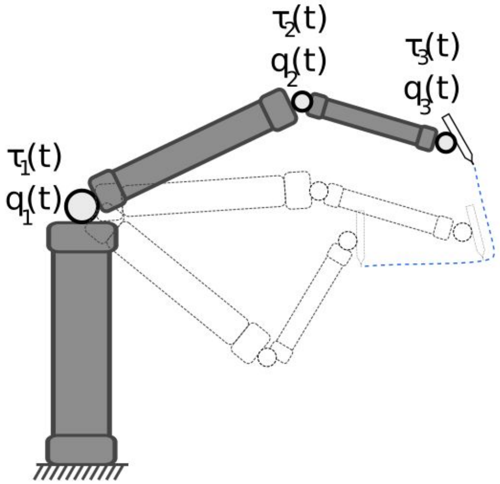
Analicemos cada término de: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$

considerando que K es la energía cinética: $K = \sum_{i}^{n} K_i = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}\right) = \mathbf{M}(q)\dot{q}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{M}(q)\dot{q}\right) = \dot{\mathbf{M}}(q)\dot{q} + \mathbf{M}(q)\ddot{q}$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1}\dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_n}\dot{q} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{M}(q)\ddot{q} + \underbrace{\dot{\mathbf{M}}(q)\dot{q} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1}\dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1}\dot{q} \end{bmatrix}} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$$

$$\mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = \tau$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***<u>multi</u>***articular

Lagrange (varios eslabones)

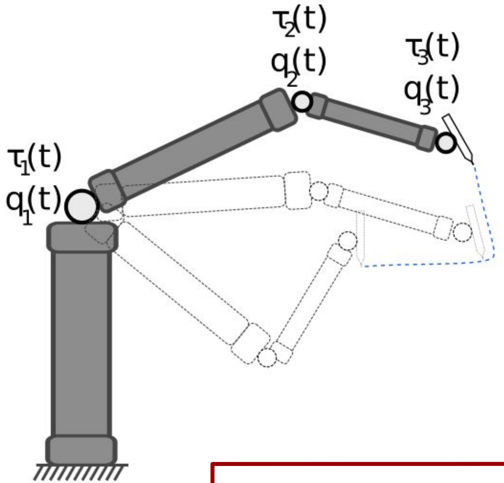
Analicemos cada término de: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$

considerando que K es la energía cinética: $K = \sum_{i}^{n} K_i = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}\right) = \mathbf{M}(q)\dot{q}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{M}(q)\dot{q}\right) = \dot{\mathbf{M}}(q)\dot{q} + \mathbf{M}(q)\ddot{q}$$

$$\frac{\partial K}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1}\dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_n}\dot{q} \end{bmatrix}$$



¿Quién es **M**(q)?

$$\mathbf{M}(q)\ddot{q} + \underbrace{\dot{\mathbf{M}}(q)\dot{q} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1}\dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1}\dot{q} \end{bmatrix}} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$$

$$\mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q) = \tau$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones) ¿Quién es **M**(q)?

La idea es calcular la energía cinética como: $K = \sum_{i}^{n} K_i$

Luego sabiendo que $K = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}$ inferir quién es **M**(q)

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones) ¿Quién es **M**(q)?

La idea es calcular la energía cinética como: $K = \sum_{i}^{n} K_i$

Luego sabiendo que $K = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}$ inferir quién es **M**(q)

"Recordando" la definición de Energía cinética:

Trabajo realizado por las fuerzas externas para traer el sistema desde el reposo hasta el estado actual.

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones) ¿Quién es **M**(q)?

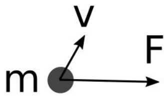
La idea es calcular la energía cinética como: $K = \sum_{i}^{n} K_i$

Luego sabiendo que $K = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}$ inferir quién es **M**(q)

"Recordando" la definición de Energía cinética:

Trabajo realizado por las fuerzas externas para traer el sistema desde el reposo hasta el estado actual.

Masa puntual:



$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones) ¿Quién es **M**(q)?

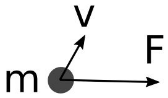
La idea es calcular la energía cinética como: $K = \sum_{i}^{n} K_i$

Luego sabiendo que $K = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}$ inferir quién es **M**(q)

"Recordando" la definición de Energía cinética:

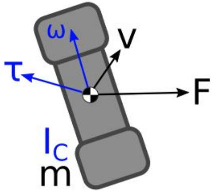
Trabajo realizado por las fuerzas externas para traer el sistema desde el reposo hasta el estado actual.

Masa puntual:



$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Cuerpo rígido:



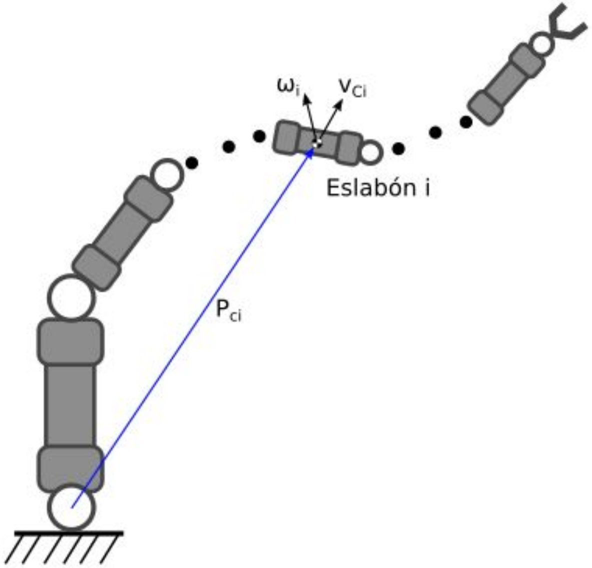
$$K = \frac{1}{2}\omega^T \mathbf{I}_c \omega + \frac{1}{2}mv^2$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones) ¿Quién es **M**(q)?

La idea es calcular la energía cinética como: $K = \sum_{i}^{n} K_i$

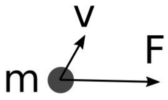
Luego sabiendo que $K = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}$ inferir quién es **M**(q)



"Recordando" la definición de Energía cinética:

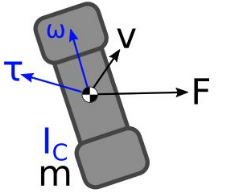
Trabajo realizado por las fuerzas externas para traer el sistema desde el reposo hasta el estado actual.

Masa puntual:



$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Cuerpo rígido:



$$K = \frac{1}{2}\omega^T \mathbf{I}_c \omega + \frac{1}{2}mv^2$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones) ¿Quién es **M**(q)?

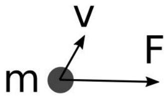
La idea es calcular la energía cinética como: $K = \sum_{i}^{n} K_i$

Luego sabiendo que $K = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}$ inferir quién es **M**(q)

"Recordando" la definición de Energía cinética:

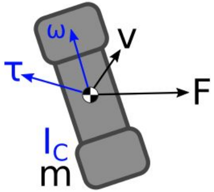
Trabajo realizado por las fuerzas externas para traer el sistema desde el reposo hasta el estado actual.

Masa puntual:

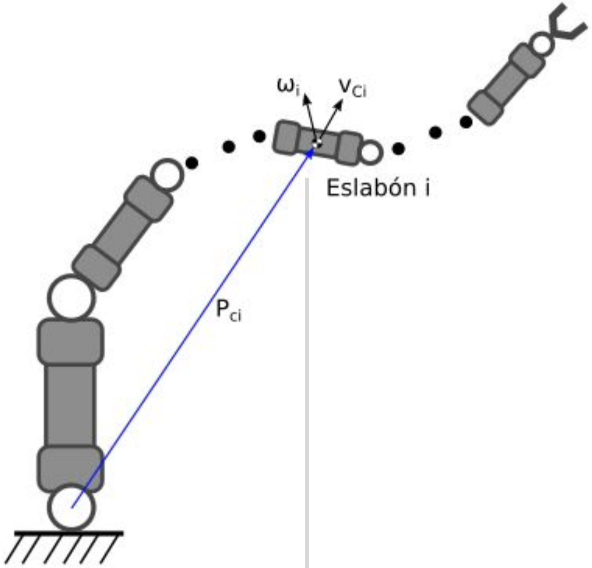


$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Cuerpo rígido:



$$K = \frac{1}{2}\omega^T \mathbf{I}_c \omega + \frac{1}{2}mv^2$$



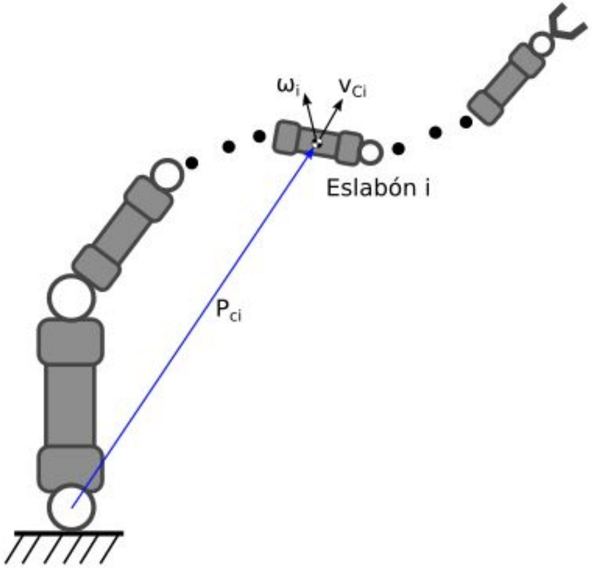
$$K_i = \frac{1}{2}\left(m_i v_{ci}^T v_{ci} + \omega_i^T \mathbf{I}_{ci}\omega_i\right)$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)

¿Quién es **M**(q)?

Entonces:
$$\begin{cases} K = \sum_{i}^{n} K_i = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q} \\ K = \sum_{i}^{n} K_i = \sum_{i}^{n} \frac{1}{2}\left(m_i v_{ci}^T v_{ci} + \omega_i^T \mathbf{I}_{ci}\omega_i\right) \end{cases}$$



Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones) ¿Quién es **M**(q)?

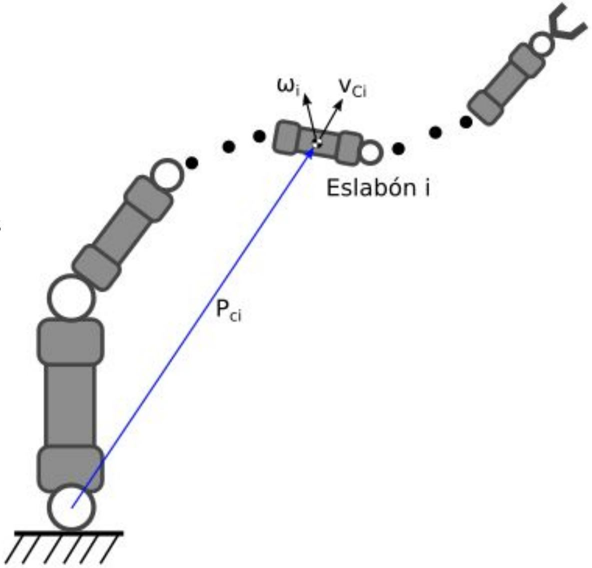
Entonces:

$$K = \sum_{i}^{n} K_i = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}$$

Velocidades art. generalizadas

$$K = \sum_{i}^{n} K_i = \sum_{i}^{n} \frac{1}{2}\left(m_i v_{ci}^T v_{ci} + \omega_i^T \mathbf{I}_{ci}\omega_i\right)$$

Velocidades del CM



Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones) ¿Quién es **M**(q)?

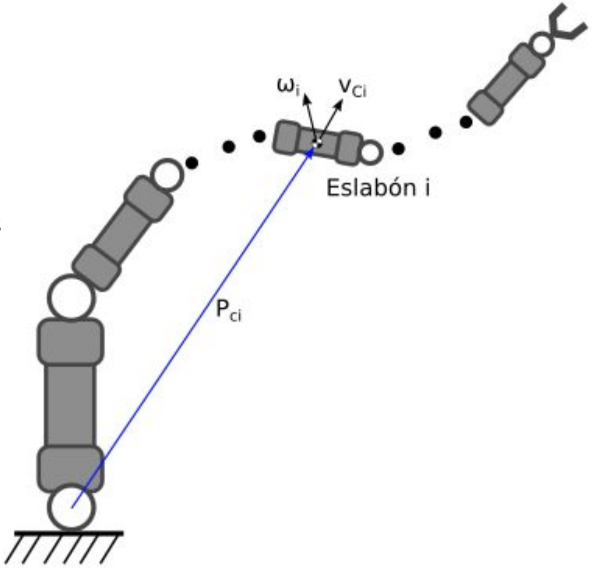
Entonces:

$$K = \sum_{i}^{n} K_i = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}$$

Velocidades art. generalizadas

$$K = \sum_{i}^{n} K_i = \sum_{i}^{n} \frac{1}{2}\left(m_i v_{ci}^T v_{ci} + \omega_i^T \mathbf{I}_{ci}\omega_i\right)$$

Velocidades del CM



Relacionando las velocidades del centro de masa del eslabón *i* con su velocidad art. generalizada a partir de las definiciones de los Jacobianos lineal y angular $\mathbf{J}_V$ y $\mathbf{J}_w$ respectivamente: $v_{c_i} = J_{v_i}\dot{\mathbf{q}}$ $\omega_{c_i} = J_{\omega_i}\dot{\mathbf{q}}$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones) ¿Quién es **M**(q)?

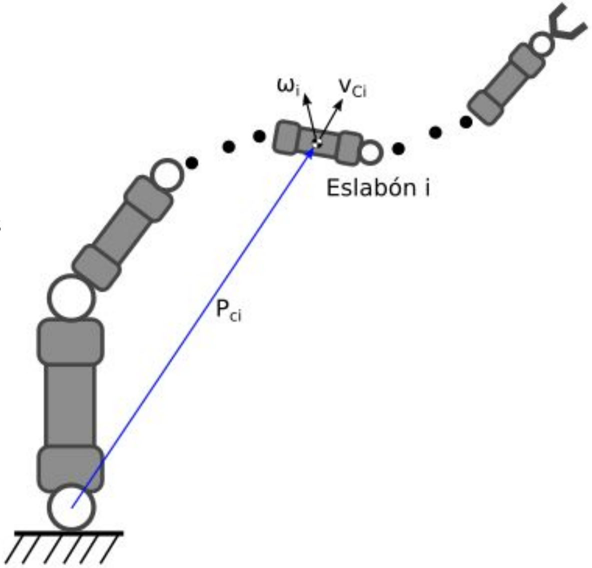
Entonces:

$$K = \sum_{i}^{n} K_i = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q}$$

Velocidades art. generalizadas

$$K = \sum_{i}^{n} K_i = \sum_{i}^{n} \frac{1}{2}\left(m_i v_{ci}^T v_{ci} + \omega_i^T \mathbf{I}_{ci}\omega_i\right)$$

Velocidades del CM



Relacionando las velocidades del centro de masa del eslabón *i* con su velocidad art. generalizada a partir de las definiciones de los Jacobianos lineal y angular $\mathbf{J}_V$ y $\mathbf{J}_w$ respectivamente: $v_{c_i} = J_{v_i}\dot{\mathbf{q}}$ $\omega_{c_i} = J_{\omega_i}\dot{\mathbf{q}}$

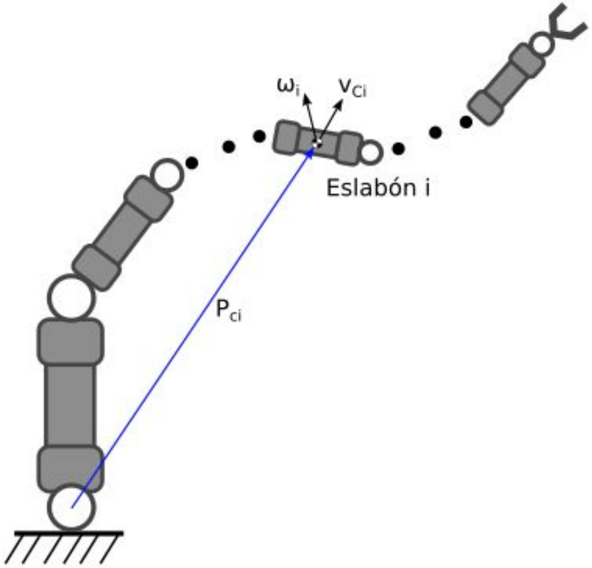
$$K = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(m_i \dot{\mathbf{q}}^T J_{v_i}^T J_{v_i}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T J_{\omega_i}^T \mathbf{I}_{C_i} J_{\omega_i}\dot{\mathbf{q}})$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)

¿Quién es **M**(q)?

Entonces: $K = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(m_i \dot{\mathbf{q}}^T J_{v_i}^T J_{v_i} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T J_{\omega_i}^T \mathbf{I}_{c_i} J_{\omega_i} \dot{\mathbf{q}})$



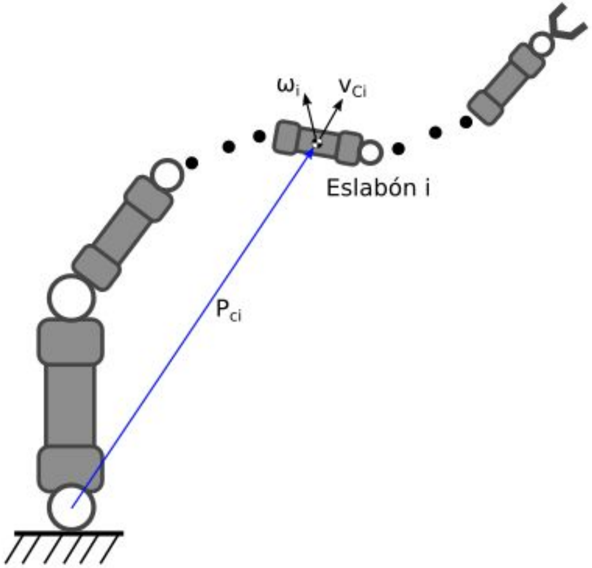
Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)

¿Quién es **M**(q)?

Entonces: $$K = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(m_i \dot{\mathbf{q}}^T J_{v_i}^T J_{v_i} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T J_{\omega_i}^T \mathbf{I}_{c_i} J_{\omega_i} \dot{\mathbf{q}})$$

$$K = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left[\sum_{i=1}^{n}(m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T \mathbf{I} J_{\omega_i})\right] \dot{\mathbf{q}}$$



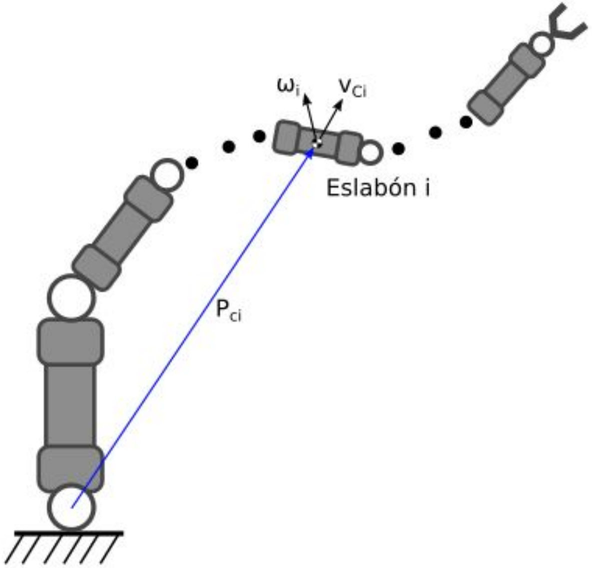
Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)

¿Quién es **M**(q)?

Entonces: $$K = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(m_i \dot{\mathbf{q}}^T J_{v_i}^T J_{v_i} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T J_{\omega_i}^T \mathbf{I}_{c_i} J_{\omega_i} \dot{\mathbf{q}})$$

$$K = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left[\sum_{i=1}^{n} (m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T \mathbf{I} J_{\omega_i}) \right] \dot{\mathbf{q}}$$



Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

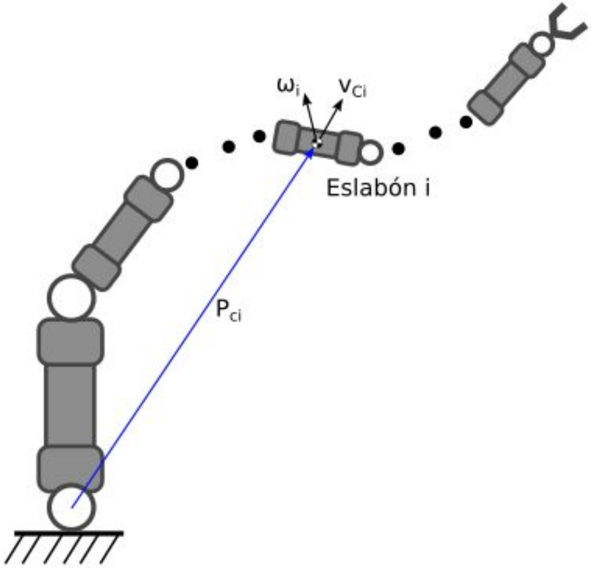
Lagrange (varios eslabones)

¿Quién es **M**(q)?

Entonces: $K = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(m_i \dot{\mathbf{q}}^T J_{v_i}^T J_{v_i} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T J_{\omega_i}^T \mathbf{I}_{c_i} J_{\omega_i} \dot{\mathbf{q}})$

$$K = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left[\sum_{i=1}^{n}(m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T \mathbf{I} J_{\omega_i})\right]\dot{\mathbf{q}}$$

$$\boxed{M(\mathbf{q}) = \left[\sum_{i=1}^{n}(m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T \mathbf{I} J_{\omega_i})\right]}$$



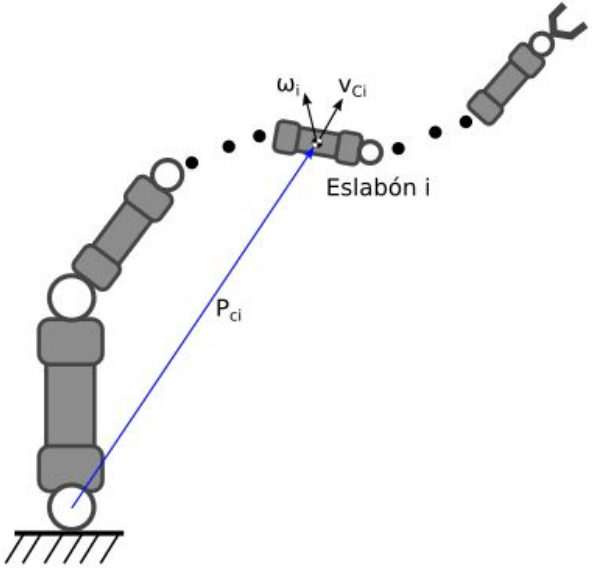
Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)

Entonces: $$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q} = \sum_i^n \frac{1}{2}\left(m_i \dot{q}^T \mathbf{J}_{P_i}^T \mathbf{J}_{P_i}\dot{q} + \dot{q}^T \mathbf{J}_{O_i}^T \mathbf{I}_{ci} \mathbf{J}_{O_i}\dot{q}\right)$$

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q} = \frac{1}{2}\dot{q}^T \left[\sum_i^n \left(m_i \mathbf{J}_{P_i}^T \mathbf{J}_{P_i} + \mathbf{J}_{O_i}^T \mathbf{I}_{ci} \mathbf{J}_{O_i}\right)\right]\dot{q}$$

$$M(\mathbf{q}) = \left[\sum_{i=1}^n (m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T \mathbf{I} J_{\omega_i})\right]$$



¿Quiénes son los Jacobianos J_{vi} y J_{wi}?

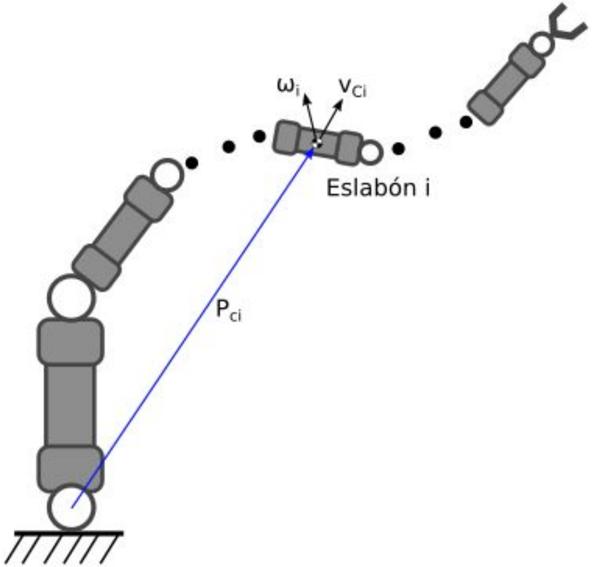
Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)

Entonces:
$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q} = \sum_i^n \frac{1}{2}\left(m_i \dot{q}^T \mathbf{J}_{P_i}^T \mathbf{J}_{P_i}\dot{q} + \dot{q}^T \mathbf{J}_{O_i}^T \mathbf{I}_{ci} \mathbf{J}_{O_i}\dot{q}\right)$$

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T \mathbf{M}(q)\dot{q} = \frac{1}{2}\dot{q}^T \left[\sum_i^n \left(m_i \mathbf{J}_{P_i}^T \mathbf{J}_{P_i} + \mathbf{J}_{O_i}^T \mathbf{I}_{ci} \mathbf{J}_{O_i}\right)\right]\dot{q}$$

$$M(\mathbf{q}) = \left[\sum_{i=1}^n (m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T \mathbf{I} J_{\omega_i})\right]$$



$$J_{v_i} = \left[\frac{\partial P_{C_i}}{\partial q_1}, \frac{\partial P_{C_i}}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial P_{C_i}}{\partial q_i}, 0, \ldots, 0\right]$$

$$J_{\omega_i} = [\bar{\epsilon}_1 z_1, \bar{\epsilon}_2, \ldots, \bar{\epsilon}_i z_i, 0, \ldots, 0]$$

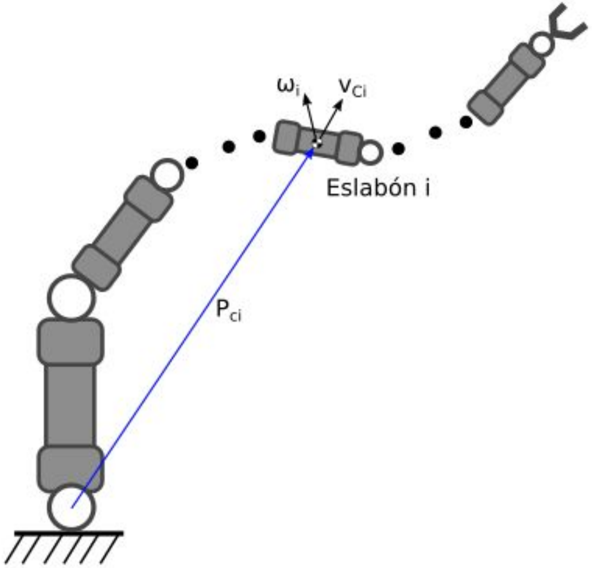
$$\bar{\epsilon}_i = \begin{cases} 1 & \text{si i es de revolucion} \\ 0 & \text{si i es prismatica} \end{cases}$$

¿Quiénes son los Jacobianos J_{vi} y J_{wi}?

Son un poco diferentes a las de cinemática diferencial, puesto que aquí necesitamos matrices que representan el jacobiano **hasta** el **centro de masa *i*,** y no el jacobiano de referente a la terminal.

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)



Entonces, la resolución del modelo dinámico a partir de la formulación de Lagrange es "*SIMPLEMENTE*":

Resolver → $$\mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q) = \tau$$

Donde:

$$\mathbf{M}(q)\ddot{q} + \dot{\mathbf{M}}(q)\dot{q} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1}\dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1}\dot{q} \end{bmatrix} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$$

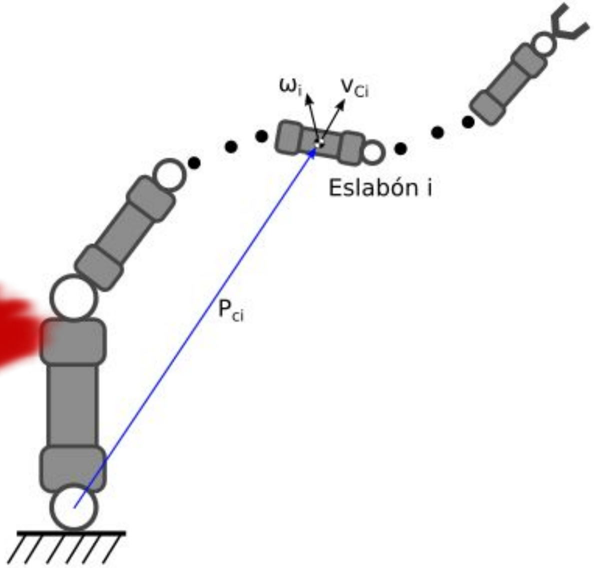
$$M(\mathbf{q}) = \left[\sum_{i=1}^{n} (m_i J_{v_i}^T J_{v_i} + J_{\omega_i}^T \mathbf{I} J_{\omega_i})\right]$$

$$J_{v_i} = \left[\frac{\partial P_{C_i}}{\partial q_1}, \frac{\partial P_{C_i}}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial P_{C_i}}{\partial q_i}, 0, \ldots, 0\right]$$

$$J_{\omega_i} = [\bar{\epsilon}_1 z_1, \bar{\epsilon}_2, \ldots, \bar{\epsilon}_i z_i, 0, \ldots, 0] \qquad \bar{\epsilon}_i = \begin{cases} 1 & \text{si i es de revolucion} \\ 0 & \text{si i es prismatica} \end{cases}$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Lagrange (varios eslabones)



Entonces, la resolución del modelo dinámico a partir de la formulación de Lagrange es "*SIMPLEMENTE*":

Resolver →
$$\mathbf{M} \ldots \ddot{} + C(q,\dot{q}) + G(q) = \tau$$

Donde:
$$\mathbf{M}(q)\ddot{q} + \dot{\mathbf{M}}(\ldots \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{q}^T\frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1}\dot{q}\\ \vdots \\ \dot{q}^T\frac{\partial \mathbf{M}(q)}{\partial q_1}\dot{q}\end{bmatrix} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau$$

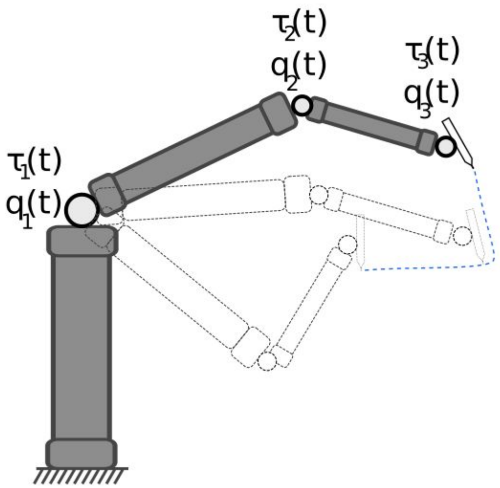
$$M(\mathbf{q}) = \left[\sum_{i=1}^{n}(m_i J^T \ldots J_{\omega_i})\right]$$

$$J_{v} \ldots \left[\ldots, \frac{\partial P_{C_i}}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial P_{C_i}}{\partial q_i}, 0, \ldots\right]$$

$$J_{\omega_i} = [\bar{\epsilon}_1 z_1, \bar{\epsilon}_2, \ldots, \bar{\epsilon}_i z_i, 0, \ldots, 0] \qquad \bar{\epsilon}_i = \begin{cases} \ldots & \text{si i es de revolucion} \\ 0 \ldots & \ldots\text{prismatica}\end{cases}$$

Por suerte hay un algoritmo!!!

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular



Algoritmo de Lagrange

Utiliza la representación de Denavit-Hartenberg basada en las matrices de transformación homogénea (4x4), provocando una complejidad computacional de orden 4 (n^4) por la redundancia contenida en las matrices ${}_{i-1}A_i$.

L1. Asignar a cada eslabón un sistema de referencia de acuerdo a las normas de DH.

L2. Calcular las matrices de transformación ${}_{i-1}A_i$ para cada eslabón i.

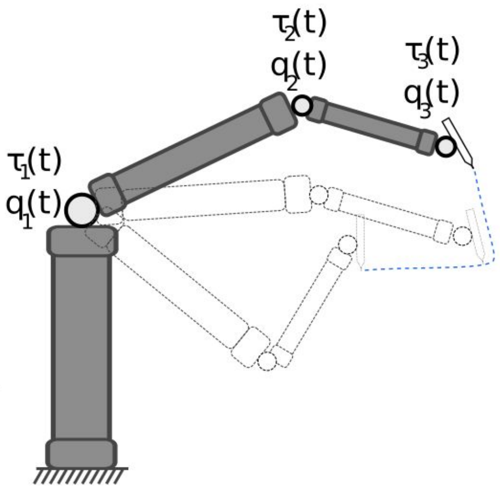
L3. Calcular las matrices U_{ij} según se definen:

$$U_{ij} = \frac{\partial\ {}_0A_i}{\partial q_j} = \begin{cases} {}_0A_{j-1} Q_j\ {}_{j-1}A_i & si \quad j \le i \\ \mathbf{0}_{(4\times4)} & si \quad j > i \end{cases}$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{si la articulación i es de rotación}$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{si la articulación i es de traslación}$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular



Algoritmo de Lagrange

L4. Calcular las matrices U_{ijk} según se definen:

$$U_{ijk} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k} = \begin{cases} {}_0A_{j-1}Q_j \; {}_{j-1}A_{k-1}Q_k \; {}_{k-1}A_i & si \quad i \geq k \geq j \\ {}_0A_{k-1}Q_k \; {}_{k-1}A_{j-1}Q_k \; {}_{j-1}A_i & si \quad i \geq j \geq k \\ \mathbf{0}_{(4\times 4)} & si \quad k > i \quad o \quad j > i \end{cases}$$

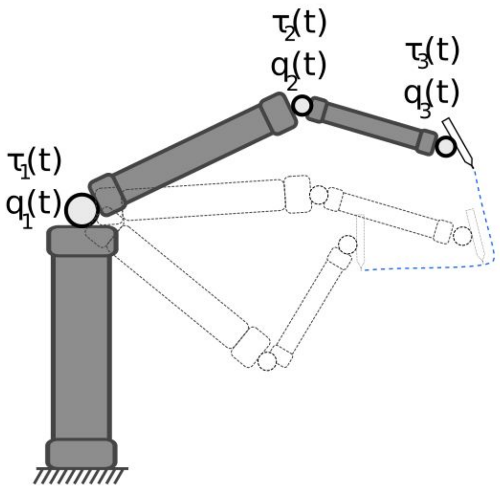
$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{si la articulación i es de rotación} \qquad Q_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{si la articulación i es de traslación}$$

L5. Calcular las matrices de pseudoinercias J_i.

$$J_i = \begin{bmatrix} \int_i x_i^2 \mathrm{dm} & \int_i x_i y_i \mathrm{dm} & \int_i x_i z_i \mathrm{dm} & \int_i x_i \mathrm{dm} \\ \int_i y_i x_i \mathrm{dm} & \int_i y_i^2 \mathrm{dm} & \int_i y_i z_i \mathrm{dm} & \int_i y_i \mathrm{dm} \\ \int_i z_i x_i \mathrm{dm} & \int_i z_i y_i \mathrm{dm} & \int_i z_i^2 \mathrm{dm} & \int_i z_i \mathrm{dm} \\ \int_i x_i \mathrm{dm} & \int_i y_i \mathrm{dm} & \int_i z_i \mathrm{dm} & \int_i \mathrm{dm} \end{bmatrix}$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Algoritmo de Lagrange



L6. Calcular la matriz de inercia **M** (nxn) donde cada término m_{ij} se calcula como:

$$m_{ij} = \sum_{k=max(i,j)}^{n} Traza(\mathbf{U}_{kj}\mathbf{J}_k\mathbf{U}_{ki}^T)$$

$$\text{con } i, j = 1, 2, .., n$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & . & & \\ . & & . & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

L7. Calcular los términos c_{ikm} que ayudaran a armar el vector de coriolis C.

$$c_{ikm} = \sum_{j=max(i,k,m)}^{n} Traza(\mathbf{U_{jkm}}\mathbf{J_j}\mathbf{U_{ji}^T}) \quad \text{con } i, k, m = 1, 2, .., n$$

L8. Calcular el vector de fuerzas de coriolis **C** donde cada entrada i es c_i:

$$c_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} c_{ikm}\dot{q}_k\dot{q}_m \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix}$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Algoritmo de Lagrange

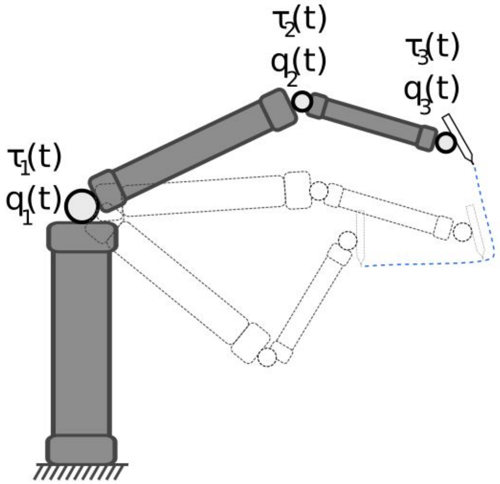
L9. Calcular el vector de fuerzas gravitatorias **G**, cuyas entradas g_i son:

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} (-m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{ji} \, {}^j\mathbf{r}_j) \qquad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_{x0} \\ g_{y0} \\ g_{z0} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n \end{bmatrix}$$

Donde ***g*** es el vector de gravedad en la base $\{S_0\}$ y ${}^i\boldsymbol{r}_j$ es el vector de coordenadas homogéneas que apunta al centro de masa del elemento j, expresado en la base i.

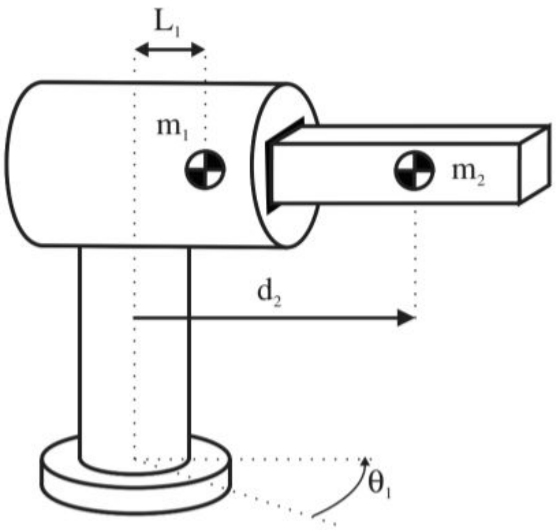
L10. Conformar la ecuación del modelo dinámico:

$$\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q)$$



Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Ejemplo - Formulación Lagrangiana

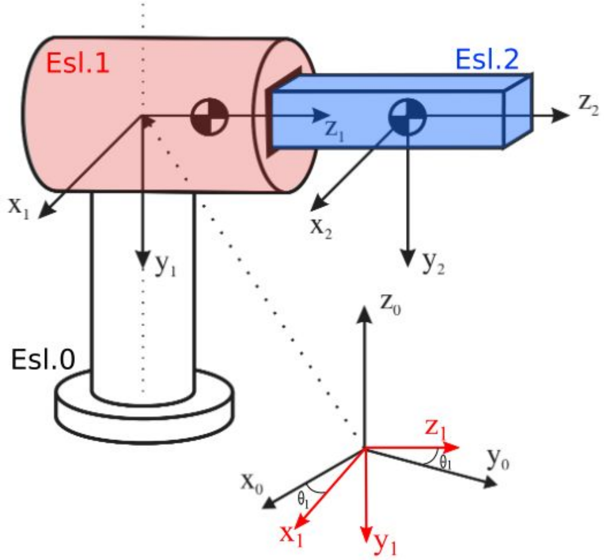


- Robot con eslabones rígidos
- Tramo recto vertical fijo
- Primer articulación: de rotación
- Segunda articulación: de traslación
- Peso m1 a una distancia L_1
- Peso m_2 a una distancia d_2

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L1. Asignar a cada eslabón un sistema de referencia de acuerdo a las normas de DH.



Parámetros de DH para cada articulación

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	–90
2	0	d_2	0	0

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L2. Calcular las matrices de transformación ${}_{i-1}A_i$ para cada eslabón i.

$$ {}_{i-1}A_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Parámetros de DH para cada articulación

Articulación	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	0	–90
2	0	d_2	0	0

$$ {}_0A_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}_1A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}_0A_2 = {}_0A_1 \; {}_1A_2 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2 S\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & d_2 C\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

$$_0A_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}_1A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$_0A_2 = {}_0A_1 \; {}_1A_2 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2S\theta_1 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & d_2C\theta_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L3. Calcular las matrices U_{ij}

$$U_{11} = \frac{\partial _0A_1}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U_{12} = \frac{\partial _0A_1}{\partial d_2} = [0]$$

$$U_{21} = \frac{\partial _0A_2}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2C\theta_1 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U_{22} = \frac{\partial _0A_2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

$$U_{11} = \frac{\partial_0 A_1}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U_{12} = \frac{\partial_0 A_1}{\partial d_2} = [0]$$

$$U_{21} = \frac{\partial_0 A_2}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2 C\theta_1 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U_{22} = \frac{\partial_0 A_2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L4. Calcular las matrices U_{ijk}

$$U_{111} = \frac{\partial\, U_{11}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ -S\theta_1 0 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U_{112} = \frac{\partial\, U_{11}}{\partial d_2} = [0]$$

$$U_{121} = \frac{\partial\, U_{12}}{\partial \theta_1} = [0] \qquad U_{122} = \frac{\partial\, U_{12}}{\partial d_2} = [0]$$

$$U_{211} = \frac{\partial\, U_{21}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & d_2 S\theta_1 \\ -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2 C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U_{212} = \frac{\partial\, U_{21}}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{221} = \frac{\partial\, U_{22}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U_{222} = \frac{\partial\, U_{22}}{\partial d_2} = [0]$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

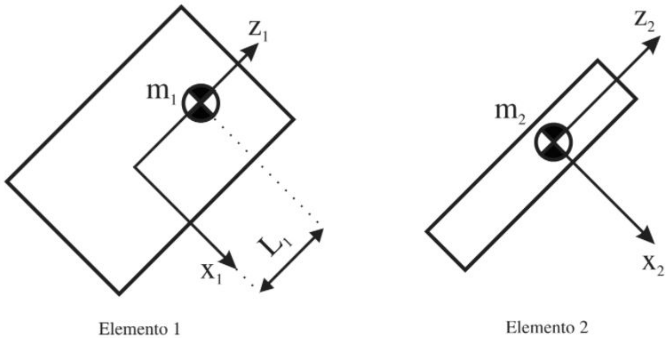
Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L5. Calcular las matrices de pseudoinercias J_i

$$J_i = \begin{bmatrix} \int_i x_i^2 dm & \int_i x_i y_i dm & \int_i x_i z_i dm & \int_i x_i dm \\ \int_i y_i x_i dm & \int_i y_i^2 dm & \int_i y_i z_i dm & \int_i y_i dm \\ \int_i z_i x_i dm & \int_i z_i y_i dm & \int_i z_i^2 dm & \int_i z_i dm \\ \int_i x_i dm & \int_i y_i dm & \int_i z_i dm & \int_i dm \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 L_1^2 & m_1 L_1 \\ 0 & 0 & m_1 L_1 & m_1 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$



Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L6. Calcular las matrices de inercias M

$$m_{11}=\sum_{k=\max(1,1)}^{2} Traza\left(\mathbf{U}_{k1}\,\mathbf{J}_k\mathbf{U}_{k1}{}^T\right)=Tr\left(\mathbf{U}_{11}\,\mathbf{J}_1\,\mathbf{U}_{11}{}^T\right)+Tr\left(\mathbf{U}_{21}\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{U}_{21}{}^T\right)$$

$$=Tr\begin{bmatrix} C_1{}^2L_1{}^2m_1 & S_1C_1L_1{}^2m_1 & 0 & 0 \\ C_1S_1L_1{}^2m_1 & S_1{}^2L_1{}^2m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+Tr\begin{bmatrix} C_1{}^2d_2{}^2m_2 & S_1C_1d_2{}^2m_2 & 0 & 0 \\ S_1C_1d_2{}^2m_2 & S_1{}^2d_2{}^2m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\left(C_1{}^2+S_1{}^2\right)m_1L_1{}^2+\left(C_1{}^2+S_1{}^2\right)d_2{}^2m_2=\boxed{m_1L_1{}^2+m_2d_2{}^2}$$

$$m_{ij}=\sum_{k=max(i,j)}^{n} Traza(\mathbf{U}_{kj}\mathbf{J}_k\mathbf{U}_{ki}^T)$$

$$\mathbf{J}_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1L_1^2 & m_1L_1 \\ 0 & 0 & m_1L_1 & m_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$U_{11}=\frac{\partial_0 A_1}{\partial\theta_1}=\begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U_{12}=\frac{\partial_0 A_1}{\partial d_2}=[0]$$

$$U_{21}=\frac{\partial_0 A_2}{\partial\theta_1}=\begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2C\theta_1 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{22}=\frac{\partial_0 A_2}{\partial d_2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L6. Calcular las matrices de inercias M

$$m_{12} = \sum_{k=\max(1,2)}^{2} Traza\left(\mathbf{U}_{k2}\,\mathbf{J}_k\,\mathbf{U}_{k1}{}^T\right) = Tr\left(\mathbf{U}_{22}\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{U}_{21}{}^T\right)$$

$$= Tr\begin{bmatrix} S_1C_1d_2m_2 & S_1{}^2d_2m_2 & 0 & 0 \\ -C_1{}^2d_2m_2 & -S_1C_1d_2m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1C_1d_2m_2 - S_1C_1d_2m_2 \boxed{= 0}$$

$$m_{21} = \sum_{k=\max(2,1)}^{2} Traza\left(\mathbf{U}_{k1}\,\mathbf{J}_k\,\mathbf{U}_{k2}{}^T\right) = Tr\left(\mathbf{U}_{21}\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{U}_{22}{}^T\right)$$

$$= Tr\begin{bmatrix} S_1C_1d_2m_2 & -C_1{}^2d_2m_2 & 0 & 0 \\ S_1{}^2d_2m_2 & -S_1C_1d_2m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1C_1d_2m_2 - S_1C_1d_2m_2 \boxed{= 0}$$

$$m_{ij} = \sum_{k=max(i,j)}^{n} Traza(\mathbf{U}_{kj}\mathbf{J}_k\mathbf{U}_{ki}^T)$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1L_1^2 & m_1L_1 \\ 0 & 0 & m_1L_1 & m_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$U_{11} = \frac{\partial_0 A_1}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U_{12} = \frac{\partial_0 A_1}{\partial d_2} = [0]$$

$$U_{21} = \frac{\partial_0 A_2}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2C\theta_1 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = \frac{\partial_0 A_2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L6. Calcular las matrices de inercias M

$$m_{22} = \sum_{k=\max(2,2)}^{2} Traza\left(\mathbf{U}_{k2}\,\mathbf{J}_k\,\mathbf{U}_{k2}^{T}\right) = Tr\left(\mathbf{U}_{22}\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{U}_{22}^{T}\right)$$

$$= Tr\begin{bmatrix} S_1^2 m_2 & -S_1C_1m_2 & 0 & 0 \\ -S_1C_1m_2 & C_1^2 m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1^2 m_2 + C_1^2 m_2 \boxed{= m_2}$$

$$\boxed{M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1L_1^2 + m_2d_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}$$

$$m_{ij} = \sum_{k=max(i,j)}^{n} Traza(\mathbf{U}_{kj}\mathbf{J}_k\mathbf{U}_{ki}^T)$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1L_1^2 & m_1L_1 \\ 0 & 0 & m_1L_1 & m_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$U_{11} = \frac{\partial_0 A_1}{\partial\theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U_{12} = \frac{\partial_0 A_1}{\partial d_2} = [0]$$

$$U_{21} = \frac{\partial_0 A_2}{\partial\theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2C\theta_1 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = \frac{\partial_0 A_2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L7. Calcular los términos c_{ikm} que ayudaran a armar el vector de coriolis C.

$$c_{111} = \sum_{j=\max(1,1,1)}^{2} Traza\left(\mathbf{U}_{j11}\,\mathbf{J}_j\,\mathbf{U}_{j1}{}^T\right) = Tr\left(\mathbf{U}_{111}\,\mathbf{J}_1\,\mathbf{U}_{11}{}^T\right) + Tr\left(\mathbf{U}_{211}\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{U}_{21}{}^T\right)$$

$$= Tr\begin{bmatrix} -C_1S_1m_1L_1{}^2 & -S_1{}^2m_1L_1{}^2 & 0 & 0 \\ C_1{}^2m_1L_1{}^2 & C_1S_1m_1L_1{}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + Tr\begin{bmatrix} -S_1C_1d_2{}^2m_2 & -S_1{}^2d_2{}^2m_2 & 0 & 0 \\ C_1{}^2d_2{}^2m_2 & S_1C_1d_2{}^2m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -C_1S_1m_1L_1{}^2 + C_1S_1m_1L_1{}^2 - d_2{}^2S_1C_1m_2 + d_2{}^2S_1C_1m_2 \boxed{= 0}$$

$$c_{ikm} = \sum_{j=max(i,k,m)}^{n} Traza(\mathbf{U_{jkm}J_jU_{ji}^T}) \quad \text{con } i,k,m = 1,2,..,n$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1L_1^2 & m_1L_1 \\ 0 & 0 & m_1L_1 & m_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$U_{11} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_{21} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2C\theta_1 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{111} = \begin{bmatrix} -C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ -S\theta_1 0 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad U_{211} = \begin{bmatrix} -C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & d_2S\theta_1 \\ -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L7. Calcular los términos c_{ikm} que ayudaran a armar el vector de coriolis C.

$$c_{112} = \sum_{j=\max(1,1,2)}^{2} Traza\left(\mathbf{U}_{j12}\,\mathbf{J}_j\,\mathbf{U}_{j1}^{\;T}\right) = Tr\left(\mathbf{U}_{212}\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{U}_{21}^{\;T}\right)$$

$$= Tr\begin{bmatrix} C_1^{\,2}d_2m_2 & S_1C_1d_2m_2 & 0 & 0 \\ S_1C_1d_2m_2 & S_1^{\,2}d_2m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C_1^{\,2}d_2m_2 + S_1^{\,2}d_2m_2 = \boxed{d_2m_2}$$

$$c_{121} = \sum_{j=\max(1,2,1)}^{2} Traza\left(\mathbf{U}_{j21}\,\mathbf{J}_j\,\mathbf{U}_{j1}^{\;T}\right) = Tr\left(\mathbf{U}_{221}\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{U}_{21}^{\;T}\right)$$

$$\text{como: } \mathrm{U}_{221} = \mathrm{U}_{212} \rightarrow \mathrm{c}_{121} = \mathrm{c}_{112} = \boxed{d_2m_2}$$

Útil

$$c_{ikm} = \sum_{j=max(i,k,m)}^{n} Traza(\mathbf{U_{jkm}J_jU_{ji}^T}) \quad \text{con } i,k,m = 1,2,..,n$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1L_1^{\,2} & m_1L_1 \\ 0 & 0 & m_1L_1 & m_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$U_{21} = \frac{\partial_0 A_2}{\partial\theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2C\theta_1 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{221} = U_{212} = \frac{\partial\, U_{21}}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L7. Calcular los términos c_{ikm} que ayudaran a armar el vector de coriolis C.

$$c_{211} = \sum_{j=\max(2,1,1)}^{2} Traza\left(\mathbf{U}_{j11}\,\mathbf{J}_j\,\mathbf{U}_{j2}{}^T\right) = Tr\left(\mathbf{U}_{211}\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{U}_{22}{}^T\right)$$

$$= Tr\begin{bmatrix} -S_1{}^2 d_2 m_2 & S_1C_1d_2m_2 & 0 & 0 \\ S_1C_1d_2m_2 & -C_1{}^2d_2m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1{}^2d_2m_2 - C_1{}^2d_2m_2 = \boxed{-d_2m_2}$$

$$c_{122} = \sum_{j=\max(1,2,2)}^{2} Traza\left(\mathbf{U}_{j22}\,\mathbf{J}_j\,\mathbf{U}_{j1}{}^T\right) = Tr\left(\mathbf{U}_{222}\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{U}_{21}{}^T\right)\boxed{=0}$$

$$c_{ikm} = \sum_{j=max(i,k,m)}^{n} Traza(\mathbf{U_{jkm}J_jU_{ji}^T}) \quad \text{con } i,k,m = 1,2,..,n$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1L_1^2 & m_1L_1 \\ 0 & 0 & m_1L_1 & m_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = \frac{\partial_0 A_2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U_{222} = \frac{\partial\, U_{22}}{\partial d_2} = [0]$$

$$U_{211} = \frac{\partial\, U_{21}}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & d_2S\theta_1 \\ -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L7. Calcular los términos c_{ikm} que ayudaran a armar el vector de coriolis C.

$$c_{212} = \sum_{j=\max(2,1,2)}^{2} Traza\left(\mathbf{U}_{j12}\,\mathbf{J}_j\,\mathbf{U}_{j2}{}^{T}\right) = Tr\left(\mathbf{U}_{212}\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{U}_{22}{}^{T}\right)$$

$$= Tr\begin{bmatrix} S_1C_1m_2 & -C_1{}^2m_2 & 0 & 0 \\ S_1{}^2m_2 & -S_1C_1m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S_1C_1m_2 - C_1S_1m_2 \boxed{= 0}$$

$$c_{221} = \sum_{j=\max(2,2,1)}^{2} Traza\left(\mathbf{U}_{j21}\,\mathbf{J}_j\,\mathbf{U}_{j2}{}^{T}\right) = Tr\left(\mathbf{U}_{221}\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{U}_{22}{}^{T}\right)$$

$$\text{como: } \mathrm{U}_{221} = \mathrm{U}_{212} \rightarrow \mathrm{c}_{221} = \mathrm{c}_{2\,2} \boxed{= 0}$$

$$c_{ikm} = \sum_{j=max(i,k,m)}^{n} Traza(\mathbf{U_{jkm}J_jU_{ji}^T}) \quad \text{con } i,k,m = 1,2,..,n$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1L_1^2 & m_1L_1 \\ 0 & 0 & m_1L_1 & m_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = \frac{\partial_0 A_2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{212} = \frac{\partial\, U_{21}}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L7. Calcular los términos c_{ikm} que ayudaran a armar el vector de coriolis C.

$$c_{222} = \sum_{j=\max(2,2,2)}^{2} Traza\left(\mathbf{U}_{j22}\,\mathbf{J}_j\,\mathbf{U}_{j2}{}^T\right) = Tr\left(\mathbf{U}_{222}\,\mathbf{J}_2\,\mathbf{U}_{22}{}^T\right) \boxed{= 0}$$

$$c_{ikm} = \sum_{j=max(i,k,m)}^{n} Traza(\mathbf{U_{jkm}J_jU_{ji}^T}) \quad \text{con } i,k,m = 1,2,..,n$$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 L_1^2 & m_1 L_1 \\ 0 & 0 & m_1 L_1 & m_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = \frac{\partial_0 A_2}{\partial d_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{222} = \frac{\partial\ U_{22}}{\partial d_2} = [0]$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

$$c_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} c_{ikm}\dot{q}_k\dot{q}_m \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} h_{111} &= 0 & h_{112} &= d_2 m_2 \\ h_{121} &= d_2 m_2 & h_{122} &= 0 \\ h_{211} &= -d_2 m_2 & h_{212} &= 0 \\ h_{221} &= 0 & h_{222} &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L8. Calcular el vector de fuerzas de coriolis **C**

$$c_1 = \sum_{k=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} c_{1km}\dot{q}_k\dot{q}_m = c_{111}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 + c_{112}\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + c_{121}\dot{d}_2\dot{\theta}_1 + c_{122}\dot{d}_2\dot{d}_2$$

$$= 0.\dot{\theta}_1^2 + 2d_2m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + 0\dot{d}_2^2 = \boxed{2d_2m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2}$$

$$c_2 = \sum_{k=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} c_{2km}\dot{q}_k\dot{q}_m = c_{211}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_1 + c_{212}\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + c_{221}\dot{d}_2\dot{\theta}_1 + c_{222}\dot{d}_2\dot{d}_2$$

$$= -d_2m_2\dot{\theta}_1^2 + 2.0.\dot{\theta}_1\dot{d}_2 + 0\dot{d}_2^2 = \boxed{-d_2m_2\dot{\theta}_1^2}$$

$$\boxed{\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2d_2m_2\dot{\theta}_1\dot{d}_2 \\ -d_2m_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}}$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} (-m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{ji}\, {}^j\mathbf{r}_j) \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix} \text{ en } S_0 \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n \end{bmatrix}$$

$$U_{11} = \frac{\partial_0 A_1}{\partial \theta_1} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U_{12} = \frac{\partial^0 A_1}{\partial d_2} = [0]$$

$$U_{21} = \begin{bmatrix} -S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & -d_2 C\theta_1 \\ C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & -d_2 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad U_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & C\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L9. Calcular el vector de fuerzas gravitatorias **G**

Recordando que $^j\mathbf{r}_j$ es el vector de coordenadas homogéneas de posici{on del centro de masa del eslabón j expresado en el sistema j, se tiene:

$${}^1r_1 = [0, 0, L_1, 1]$$
$${}^2r_2 = [0, 0, 0, 1]$$

$$g_1 = \sum_{j=1}^{2} \left(-m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{j1}\, {}^j\mathbf{r}_j\right) = -m_1 \mathbf{g} \mathbf{U}_{11}\, {}^1\mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{g} \mathbf{U}_{21}\, {}^2\mathbf{r}_2$$

$$= -m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \\ 1 \end{bmatrix} - m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_1 & 0 & -C_1 & -d_2 C_1 \\ C_1 & 0 & -S_1 & -d_2 S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{0}$$

$$g_2 = \sum_{j=1}^{2} \left(-m_j \mathbf{g} \mathbf{U}_{j2}\, {}^j\mathbf{r}_j\right) = -m_1 \mathbf{g} \mathbf{U}_{12}\, {}^1\mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{g} \mathbf{U}_{22}\, {}^2\mathbf{r}_2$$

$$= -m_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g & 0 \end{bmatrix} [0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \\ 1 \end{bmatrix} - m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -S_1 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{0}$$

$$\boxed{\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Modelo dinámico - Robot rígido ***multi***articular

Útil

$$M = \begin{bmatrix} m_1 L_1^2 + m_2 d_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2d_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -d_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo - Formulación Lagrangiana

L10. Conformar la ecuación del modelo dinámico:

$$\tau = \mathbf{M}(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + G(q)$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 L_1^2 + m_2 d_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2d_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -d_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} T_1 = \left(m_1 L_1^2 + m_2 d_2^2\right)\ddot{\theta}_1 + 2d_2 m_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ F_2 = m_2 \ddot{d}_2 - d_2 m_2 \dot{\theta}_1^2 \end{cases}}$$

FIN!