



Teoría de Lenguajes

$L=L(G)$
Gramáticas Regulares



$$\mathcal{L} = L(G)$$

Dado un lenguaje, construimos una gramática... pero...
¿cómo podemos probar que esa gramática genera ese lenguaje y que toda tira de ese lenguaje puede ser generada por esa gramática?

Aplicación:

$$\mathcal{L} = \{ 0^k 1^k \mid k > 0 \}$$

Se construye una GLC $G:(V,T,P,S)$

$$V = \{S\} \quad T = \{0,1\} \quad P = \{S \rightarrow 01, \\ S \rightarrow 0S1\}$$

$$\mathcal{L} \subseteq L(G)$$

Se demuestra por IC en $|x|$ siendo $x \in \mathcal{L}$

PB: $|x|=2 \Rightarrow 01$ y $\exists S \rightarrow 01 \in P \therefore x \in L(G)$ ✓

HI: Se cumple para $|x| = 2h$ ($x = 0^h 1^h \Rightarrow S \Rightarrow^* x$)

TI: Se cumple para $|x| = 2h + 2$ ($x = 0^{h+1} 1^{h+1} \Rightarrow S \Rightarrow^* x$)

Dem:

Sea $x = 0^{h+1} 1^{h+1} = 0 0^h 1^h 1 = 0x'1$ $x' \in \mathcal{L}$ (es de la forma de las tiras y $|x'|=2h$) entonces $S \Rightarrow^* x'$ (por HI)

Se tiene que $0S1 \Rightarrow^* 0x'1$

Además $\exists S \rightarrow 0S1 \in P$ } $S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow^* 0x'1 = x \therefore S \Rightarrow^* x$ de donde $x \in L(G)$

✓

$$\mathcal{L} \supseteq L(G)$$

Se demuestra por IC en la cantidad de pasos en la derivación de x siendo $x \in L(G)$

PB: $\exists S \rightarrow 01 \in P \therefore S \Rightarrow 01$ y $01 \in \mathcal{L}$ ✓

HI: Se cumple para tiras con cantidad de derivaciones $\leq h$ ($S \Rightarrow^{\leq h} x$ entonces $x \in \mathcal{L}$)

TI: Se cumple para tiras con cantidad de derivaciones $\leq h+1$

Dem:

$$\left. \begin{array}{l} S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow^h x \\ x = 0x'1 \end{array} \right\} S \Rightarrow^* x' \text{ en una cantidad de derivaciones } \leq h, \text{ entonces } x' \in \mathcal{L}$$

Por lo tanto $0x'1 = x \in \mathcal{L}$ ✓

Gramáticas Libres de Contexto

$$G = (V, T, P, S)$$

Es un formalismo para especificar lenguajes

- V : conjunto finito de variables
- T : conjunto finito de terminales ($T \equiv \Sigma$)
- P : conjunto de reglas de producción
- S : símbolo inicial $S \in V$

$$A \rightarrow \alpha \quad / \quad \alpha \in (V \cup T)^*$$

$$A \in V$$

Lenguajes Regulares y Libres de Contexto

Teorema

Todo lenguaje regular es libre de contexto

Demo: sobre la estructura de las ER

- $\emptyset$ alcanza con una gramática no tenga reglas ($P=\emptyset$)
- ε $S \rightarrow \varepsilon$
- a $S \rightarrow a$
- Si r_1 y r_2 son ER y $G_1:(V_1,T_1,P_1,S_1)$ y $G_2:(V_2,T_2,P_2,S_2)$ GLC /
 $L(r_1) = L(G_1)$ y $L(r_2) = L(G_2)$

Entonces existe $G_3:(V_3,T_3,P_3,S_3)$ / $L(r_3) = L(G_3)$ siendo

$$1) \ r_3 = r_1 \mid r_2 \quad 2) \ r_3 = r_1 \cdot r_2 \quad 3) \ r_3 = r_1^*$$

Lenguajes Regulares y Libres de Contexto

Demo: (cont.) Se asume que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$$1) \quad r_3 = r_1 \mid r_2 \quad G_3:(V_3, T_3, P_3, S_3) / \quad V_3 = V_1 \cup V_2 \cup \{S_3\} \quad T_3 = T_1 \cup T_2 \\ P_3 = P_1 \cup P_2 \cup \{S_3 \rightarrow S_1 \mid S_2\}$$

$$2) \quad r_3 = r_1 \cdot r_2 \quad G_3:(V_3, T_3, P_3, S_3) / \quad V_3 = V_1 \cup V_2 \cup \{S_3\} \quad T_3 = T_1 \cup T_2 \\ P_3 = P_1 \cup P_2 \cup \{S_3 \rightarrow S_1 S_2\}$$

$$3) \quad r_3 = r_1^* \quad G_3:(V_3, T_3, P_3, S_3) / \quad V_3 = V_1 \cup \{S_3\} \quad T_3 = T_1 \\ P_3 = P_1 \cup \{S_3 \rightarrow S_1 S_3 \mid \varepsilon\}$$

Gramáticas Regulares

Sea una GLC $G:(V,T,P,S)$

Gramática Lineal Izquierda

es una gramática en donde **TODA** producción tiene la forma:

$$A \rightarrow Bw$$

$$A \rightarrow w \quad \text{con } A, B \in V \\ w \in T^*$$

Gramáticas Regulares

Sea una GLC $G:(V,T,P,S)$

Gramática Lineal Derecha

es una gramática en donde **TODA** producción tiene la forma:

$$A \rightarrow wB$$

$$A \rightarrow w \quad \text{con } A, B \in V \\ w \in T^*$$

Gramáticas Regulares

Ejemplos

(1) $(01)^*1$

(2) $1^*0^*1^*$

(3) $(0|1)^*001^*$