

Ejercicio 1

Se realiza una encuesta para tratar de estimar el porcentaje de votos de determinado candidato. Al final de la misma se tendrán n respuestas, representadas en la muestra X_1, X_2, \dots, X_n de realizaciones de la variable de Bernoulli de parámetro p (la probabilidad de que una persona elegida al azar en la población vote por el candidato en cuestión).

1. A partir de la mencionada muestra ¿Qué valor usaría usted para estimar p ?
2. Usando la Desigualdad de Chebyshev (y antes de tomar la muestra) ¿Cuántos datos tomaría para que, con una probabilidad de al menos 0,95, el estimador no distara del valor de p más de un 0,03? (Sugerencia: Demuestre y use que para cualquier valor de $p \in [0, 1]$ se cumple $p(1-p) \leq 1/4$).

Ley Fuerte de los Grandes Números

Definición. Sea X_1, X_2, \dots, X_n una sucesión de variables aleatorias. Se dice que $X_n \xrightarrow{c.s.} a \in \mathbb{R}$ si se cumple que $\mathbf{P}(\{X_n \rightarrow a\}) = 1$. Se dice en este caso que la sucesión X_n converge casi seguramente a a .

Ejercicio 2

Este ejercicio describe el *método de Montecarlo* para el cálculo de integrales.

1. Sean $(U_i)_{i \in \mathbb{N}} \sim \mathcal{U}[a, b]$ iid y $f \in R[a, b]$ (f es integrable Riemann en $[a, b]$), mostrar que:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(U_i) \xrightarrow{c.s.} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

2. Sea D una región arbitraria de $[0, 1] \times [0, 1]$ y sean U_1, U_2, \dots, U_n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución $\mathcal{U}([0, 1] \times [0, 1])$, es decir que se cumple que $\mathbf{P}(U \in A) = \text{área}(A \cap [0, 1] \times [0, 1])$.

Si $a_n = \frac{\#\{i : 1 \leq i \leq n \text{ y } U_i \in D\}}{n}$ probar que $a_n \xrightarrow{c.s.} \text{área}(D)$.

Ejercicio 3

Sean $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ variables independientes e idénticamente distribuidas.

Suponga que $\mathbf{E}(X_1) = 0$ y sea $Y_i = \frac{X_i + X_{i+1}}{2}$.

Demstrar que $\bar{Y}_n \xrightarrow{c.s.} 0$, aunque Y_n, Y_{n+1} pueden ser dependientes para todo n .

Ejercicio 4

Demstrar que si $X_n \xrightarrow{c.s.} a$ e $Y_n \xrightarrow{c.s.} b$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua entonces

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{c.s.} a + b$
2. $X_n Y_n \xrightarrow{c.s.} ab$
3. $g(X_n) \xrightarrow{c.s.} g(a)$.

Ejercicio 5

Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de v.a. *iid* con $\mathbf{E}(X_1) = a > 0$. Probar que entonces

$$\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{c.s.} +\infty$$

Ejercicio 6

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro λ .

1. Hallar el límite casi seguro de $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)^2$.
2. Hallar el límite casi seguro de $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$.