Práctico 7

Teoría de Lenguajes

Los objetivos de este práctico son que el/la estudiante

- pueda construir **autómatas push-down** que reconozcan lenguajes libres de contexto;
- comprenda el uso del formalismo de menor complejidad posible para reconocer o generar lenguajes.

Ejercicios fundamentales

Ejercicio 1

Cree y diagrame **autómatas push-down** que reconozcan los siguientes lenguajes, indicando en cada caso si se trata de un autómata determinista o no determinista:

1. El conjunto de los palíndromos[1] sobre $\Sigma = \{a, b\}$.
2. $L_2 = \{w \in \Sigma^* : w = xyy^r x^r : x \in \Sigma^* \wedge y \in \Sigma^*\}$, con $\Sigma = \{a, b, c\}$.
3. $L_3 = \{w \in L(a^*b^*c^*) : |w|_a > |w|_c \wedge |w|_b > 0\}$, con $\Sigma = \{a, b, c\}$.
4. $L_4 = \{a^n b^m : (m = n \vee m = 2n) \wedge n \geq 0\}$, con $\Sigma = \{a, b\}$.
5. Tiras de paréntesis balanceados, con $\Sigma = \{(,)\}$
6. Expresiones regulares sobre un alfabeto compuesto por a y b. Es decir, $\Sigma = \{a, b, (,), |, ., *, \epsilon, \emptyset\}$
7. $L_7 = \{a^n b^m c^k : k = |m - n| \wedge k > 0 \wedge m \geq 0 \wedge n \geq 0\}$, con $\Sigma = \{a, b, c\}$.
8. $L_8 = \{a^n b^m c^k : k > n + m \wedge n + m > 0\}$, con $\Sigma = \{a, b, c\}$.
9. $L_9 = \{a^n b^m c^k : n \neq m \vee m \neq k\}$, con $\Sigma = \{a, b, c\}$.
10. $L_{10} = \{w_1\%w_2\%...\%w_n\&w : (\exists i)w_i^R = w \wedge w_i \in L(a|b)^* \wedge n > 0\}$, con $\Sigma = \{a, b, \%, \&\}$.

Ejercicio 2

Como se vio en el práctico anterior, existen gramáticas libres de contexto y gramáticas regulares. Tanto las gramáticas libres de contexto como los autómatas push-down **pueden** generar y reconocer lenguajes regulares. Sin embargo, en la resolución de los ejercicios **se va a exigir que se use siempre el formalismo de menor complejidad posible**. Es decir:

- si el lenguaje es **regular**, la gramática que lo genere deberá ser **regular** y el autómata **finito**
- si el lenguaje es **libre de contexto pero no regular**, la gramática que lo genere deberá ser **libre de contexto** y el autómata **push-down**

En este ejercicio practicará esta restricción.

[1] La tira se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Si w es un palíndromo, entonces cumple que $w = w^r$.

Parte A

Para cada uno de los siguientes lenguajes L_i:

- construya una gramática G tal que $L(G) = L_i$ ¿Está simplificada? Justifique.
- construya un autómata M tal que $L(M) = L_i$ ¿Es determinista? Justifique.

1. $L_1 = \{a^i b^j a^k : j > 0 \wedge j = i + k\}$
2. $L_2 = \{a^i \# b^{i \ mod \ 3} : i > 0\}$
3. $L_3 = \{(abba)^i b^j a \# b^j a : i > 0 \wedge j > 0\}$
4. $L_4 = \{(abba)^i (ba)^i \# ((ba)^j)^i : i \in \{1, 3\} \wedge j > 0\}$
5. L_5 es el conjunto de todas las posibles secuencias de mensajes emitidos[2] según un protocolo de comunicación que cuenta con las siguientes reglas:
   - todos los mensajes comienzan con una c y terminan con una f;
   - el texto del mensaje consta de **uno o más** dígitos $d : \ d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
   - a continuación del texto, y antes de la finalización con f, vienen caracteres de verificación, denotados por x. La cantidad de caracteres de verificación está dada por $\lfloor \frac{k}{3} \rfloor + 1$ donde k es el largo del texto.
   - Ejemplos de **mensajes**: $c13029xxf$, $c1xf$, $c1234xxf$.
   - Ejemplos de **secuencias de mensajes**: $c13029xxfc1xf$, $c1xfc0xfc103xxf$

Parte B

Para cada una de las siguientes gramáticas G_i:

- mediante la intuición, analice las tiras generadas por G_i y exprese $L(G_i)$ por comprensión.
- mediante la intuición, determine si $L(G_i)$ es un lenguaje **regular** o no.
- usando las definiciones vistas en el curso, determine si G_i es una gramática libre de contexto o regular.
- construya un autómata M tal que $L(M) = L(G_i)$ ¿Es determinista? Justifique.

1. $S \longrightarrow aTb$
   $T \longrightarrow aTc \mid U$
   $U \longrightarrow cU \mid c$
2. $S \longrightarrow Sc \mid Ac$
   $A \longrightarrow Aaa \mid b$
3. $S \longrightarrow aaSc \mid B$
   $B \longrightarrow aBbb \mid b$
4. $S \longrightarrow bS \mid bA$
   $A \longrightarrow aaAa \mid b$

[2] A la secuencia de mensajes piénsela como si se emitiera un mensaje a continuación del otro.

Ejercicios complementarios

Ejercicio 3

Cree y diagrame **autómatas push-down** que reconozcan los siguientes lenguajes, indicando en cada caso si se trata de un autómata determinista o no determinista:

1. $L_1 = \{a^i b^j c^k : (k > i \vee k > j) \wedge (k < i + j)\}$
2. $L_2 = \{x \in \Sigma^* : |x|_a = 2|x|_b\}$, con $\Sigma = \{a, b\}$

Ejercicio 4

Considere los siguientes lenguajes:

- $L_1 = \{a^k b^p a^{3k+p} : k \geq 1 \wedge p \geq 0\}$
- $L_2 = \{a^k b^j c^p d^{j-k} : j > k \wedge k \geq 0 \wedge p \geq 0\}$
- $L_3 = (L_1 L_2 \cup L_2)^*$
- $L_4 = \{x \in \{a, b, c\}^* : x \neq a^n b^n c^n \wedge n \geq 0\}$

1. Pruebe **formalmente** que L_1, L_2 y L_4 son, o no, regulares.
2. Construya gramáticas simplificadas que generen L_1, L_2, L_3 y L_4.
3. Construya autómatas que reconozcan L_1, L_2, L_3 y L_4. ¿Son deterministas? Justifique.

Ejercicio 5

Se dice que un lenguaje L tiene la *propiedad de los prefijos* si ninguna tira de L es un prefijo propio de alguna otra tira de L.

1. **Demuestre el siguiente enunciado**:

   M es un APD determinista que acepta a L por stack vacío $\Longrightarrow$ L tiene la propiedad de los prefijos.

2. ¿Es lo anterior necesariamente cierto si el autómata es no determinista?