Optimización bajo Incertidumbre
9. Optimización Robusta

Carlos Testuri – Germán Ferrari

Departamento de Investigación Operativa – Instituto de Computación
Facultad de Ingeniería – Universidad de la República

2003-2022

Contenido

Motivación

Desafíos de la optimización estocástica:

- Obtener la distribución de los datos inciertos puede ser costoso
- Resolver un modelo muy grande puede ser difícil

La optimización robusta:

- Representa la incertidumbre mediante rangos de variación de los datos
- Facilita la resolución debido a la representación abreviada de la incertidumbre
- Mantiene la propiedad de resolución eficiente
- Controla el compromiso entre los niveles de optimalidad y robustez
- Establece solo una etapa de información incierta

Problema original

Sea el problema (original) de optimización entera-mixta

$$\begin{aligned} \min \quad & c^{\tau} x \\ \text{s.a} \quad & Ax \leq b, \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, ..., k, \\ & x_i \geq 0, \quad i = k+1, ..., n, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ y $c \in \mathbb{Z}^n$.

Se asume, sin pérdida de generalidad, que A y c son inciertos, pero no así b. El vector b original se puede considerar incierto incorporándolo a A mediante una variable artificial y estableciendo el b estructural en cero.

Alcance de la incertidumbre

Los elementos de A y c se modelan como variables aleatorias independientes denominadas $\tilde{a}_{ij}$ y $\tilde{c}_j$.

Se asume que se dispone de sus rangos de variación según:

- A: Para cada (i,j) existen a_{ij} y $e_{ij} \geq 0$ tales que el rango de $\tilde{a}_{ij}$ es $[a_{ij} - e_{ij}, a_{ij} + e_{ij}]$.
- c: Para cada j existen c_j y $d_j \geq 0$ tales que el rango de $\tilde{c}_j$ es $[c_j, c_j + d_j]$.

Representación de la robustez

El compromiso entre los niveles de cambio (robustez) y conservación de los elementos de A y c se establece a partir de la cantidad de coeficientes que podrían variar según el parámetro $\Gamma \in \mathbb{Z}^{m+1}$.

Para cada restricción $i = 1, ..., m$**:**
Sea J_i el conjunto de coeficientes sujetos a incertidumbre, $J_i := \{j | e_{ij} > 0\}$.

Se tiene un valor entero $\Gamma_i \in \{0, 1, ..., |J_i|\}$ que representa la cobertura (solución robusta factible) ante los escenarios en que hasta Γ_i coeficientes puedan variar.

Si, luego de desvelarse la incertidumbre, variaran más de Γ_i coeficientes entonces la solución robusta será factible con cierta probabilidad.

Se denomina a Γ_i como el ***nivel de protección*** de la restricción i-ésima.

Compromiso entre robustez y optimalidad

El parámetro Γ_0, asociado al vector de costos c, controla el compromiso entre robustez y optimalidad.

Para el conjunto de costos inciertos $J_0 := \{j|d_j > 0\}$ se selecciona el nivel de protección $\Gamma_0 \in \{0, 1, ..., |J_0|\}$.

Un valor grande de Γ_0 incrementa el nivel de robustez a expensas de un mayor costo sobre el problema original.

Se busca determinar una solución robusta que minimice la máxima variación de costos ante los escenarios en que a lo sumo Γ_0 de los costos varíe.

Problema robusto del problema original

Dado el problema original según filas a_i de la matriz A

$$\begin{array}{rl} \min & c^\tau x \\ \text{s.a} & a_i^\tau x \leq b_i, \quad i = 1, ..., m, \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, ..., k, \\ & x_i \geq 0, \quad i = k+1, ..., n. \end{array}$$

Una formulación robusta que minimiza la máxima variación de coeficientes es su contraparte robusta, *problema robusto*, con $\Gamma := [\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m]$,

$$\begin{array}{rl} \min & c^\tau x + \max_{\{S_0 : S_0 \subseteq J_0, |S_0| \leq \Gamma_0\}} \sum_{j \in S_0} d_j x_j \\ \text{s.a} & a_i^\tau x + \max_{\{S_i : S_i \subseteq J_i, |S_i| \leq \Gamma_i\}} \sum_{j \in S_i} e_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, ..., m, \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, ..., k, \\ & x_i \geq 0, \quad i = k+1, ..., n. \end{array} \tag{2}$$

La cual es un problema de optimización combinatorial [1].

¿Qué se puede decir de su dificultad de resolución?

Reformulación del problema robusto

La formulación combinatorial se puede reformular como un problema de optimización entera-mixta,

$$\begin{array}{rl} \min & c^\tau x + \Gamma_0 z_0 + \sum_{j \in J_0} p_{0j} \\ \text{s.a} & a_i^\tau x + \Gamma_i z_i + \sum_{j \in J_i} p_{ij} \leq b_i, \quad i = 1, ..., m, \\ & z_0 + p_{0j} \geq d_j x_j, \quad j \in J_0, \\ & z_i + p_{ij} \geq e_{ij} x_j, \quad i = 1, ..., m, j \in J_i, \\ & p_{ij} \geq 0, \quad i = 0, 1, ..., m, j \in J_i, \\ & z_i \geq 0, \quad i = 0, 1, ..., m, \\ & x_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, ..., k, \\ & x_i \geq 0, \quad i = k+1, ..., n, \end{array} \tag{3}$$

la cual contiene $n + m + 1 + \sum_{i=0}^{m} |J_i|$ restricciones y variables [2].
[Su demostración requiere conocimiento de optimización entera y dualidad; por lo cual queda fuera del alcance del curso.]

Probabilidad de no cumplimiento de restricciones

Sea x^* una solución óptima del problema (3).
La probabilidad de que su valoración en la restricción i-ésima no se cumpla, $P(\tilde{a}_i^T x^* > b_i)$, es aproximadamente a lo sumo

$$\Phi\left(\frac{\Gamma_i - 1}{\sqrt{|J_i|}}\right),$$

donde Φ es la función de distribución normal estándar [2].

Dado cierto nivel de probabilidad α se puede determinar Γ_i que no lo supere

$$\Phi\left(\frac{\Gamma_i - 1}{\sqrt{|J_i|}}\right) \leq \alpha.$$

Problema de flujo en red

Dada una red de flujo $R = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, c, b, u, x)$ mediante un grafo dirigido compuesto por nodos $\mathcal{N}$, arcos $\mathcal{A}$, demandas b_i, $i \in \mathcal{N}$, y costos unitarios c_{ij}, capacidades u_{ij} y flujo x_{ij} en arcos de i a j según $(i,j) \in \mathcal{A}$.

Se define el *problema de flujo en red de costo mínimo* como

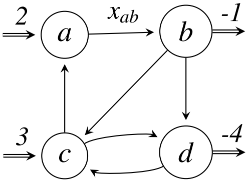
$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.a} & \sum_{\{k:(i,k)\in\mathcal{A}\}} x_{ik} - \sum_{\{k:(k,i)\in\mathcal{A}\}} x_{ki} = b_i, \quad i \in \mathcal{N}, \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \quad (i,j) \in \mathcal{A}. \end{array}$$

A cuyo conjunto de soluciones factibles se denomina $\mathcal{F}$, es decir

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.a} & x \in \mathcal{F}. \end{array}$$

Instancia del problema de flujo en red

Dado el grafo dirigido con demandas



Se tienen las restricciones de *conservación de flujo* en formato matricial

Nodo	x_{ab}	x_{bc}	x_{bd}	x_{ca}	x_{cd}	x_{dc}	$\boldsymbol{b}$
a	1	0	0	-1	0	0	2
b	-1	1	1	0	0	0	-1
c	0	-1	0	1	1	-1	3
d	0	0	-1	0	-1	1	-4

Problema de flujo en red robusto

Se asume que los costos son inciertos y pueden tomar valores en $[c_{ij}, c_{ij} + d_{ij}]$, donde $c_{ij}, d_{ij} \geq 0$, con $(i,j) \in \mathcal{A}$.

Se define el *problema de flujo en red robusto de costo mínimo* como

$$\begin{array}{cl} \min & \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij}x_{ij} + \max_{\{S: S\subseteq J, |S|\leq \Gamma\}} \sum_{(i,j)\in S} d_{ij}x_{ij} \\ \text{s.a} & x \in \mathcal{F}, \end{array}$$

donde $\Gamma \in \{0, ..., |J|\}$, con $J := \{(i,j) \in \mathcal{A} | d_{ij} > 0\}$.

El cual, según (3), se puede reformular como un problema de optimización lineal,

$$\begin{array}{cl} \min & c^{\tau}x + \Gamma z + \sum_{(i,j)\in J} p_{ij} \\ \text{s.a} & z + p_{ij} \geq d_{ij}x_{ij}, \quad (i,j) \in J, \\ & p_{ij} \geq 0, \quad (i,j) \in J, \\ & z \geq 0, \\ & x \in \mathcal{F}. \end{array}$$

1. Ben-Tal, A., Nemirovski, A. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. Math. Programming 88 411–424, 2000. https://doi-org.proxy.timbo.org.uy/10.1007/PL00011380

2. Bertsimas, D., Sim, M.: The price of robustness, Operations Research, 52(1), 35–53, 2004, http://www.jstor.org/stable/30036559