Práctico 6

Teoría de Lenguajes

Los objetivos de este práctico son que el/la estudiante

- pueda construir **gramáticas libres de contexto** para generar lenguajes libres de contexto;
- pueda construir **gramáticas regulares** para generar lenguajes regulares;
- aprenda a simplificarlas;
- realice pruebas formales sobre ambos tipos de gramáticas.

Ejercicios fundamentales

Ejercicio 1

Parte A

Defina **gramática libre de contexto**.

Parte B

Cree **gramáticas libres de contexto** que generen los lenguajes:

1. El conjunto de los palíndromos[1] sobre $\Sigma = \{a, b\}$.
2. $L_2 = \{w \in \Sigma^* : w = xyy^r x^r : x \in \Sigma^* \wedge y \in \Sigma^*\}$, con $\Sigma = \{a, b, c\}$.
3. $L_3 = \{w \in L(a^*b^*c^*) : |w|_a > |w|_c \wedge |w|_b > 0\}$, con $\Sigma = \{a, b, c\}$.
4. $L_4 = \{a^n b^m : (m = n \vee m = 2n) \wedge n \geq 0\}$, con $\Sigma = \{a, b\}$.
5. Tiras de paréntesis balanceados, con $\Sigma = \{(,)\}$
6. Expresiones regulares sobre un alfabeto compuesto por a y b. Es decir, $\Sigma = \{a, b, (,), |, ., *, \epsilon, \emptyset\}$
7. $L_7 = \{a^n b^m c^k : k = |m - n| \wedge k > 0 \wedge m \geq 0 \wedge n \geq 0\}$, con $\Sigma = \{a, b, c\}$.[2]
8. $L_8 = \{a^n b^m c^k : k > n + m \wedge n + m > 0\}$, con $\Sigma = \{a, b, c\}$.
9. $L_9 = \{a^n b^m c^k : n \neq m \vee m \neq k\}$, con $\Sigma = \{a, b, c\}$.
10. $L_{10} = \{a^i b^j c^k : (k > i \vee k > j) \wedge (k < i + j)\}$[3].
11. $L_{11} = \{x \in \Sigma^* : |x|_a = 2|x|_b\}$, con $\Sigma = \{a, b\}$[4].
12. $L_{12} = \{w_1\%w_2\%...\%w_n\&w : (\exists i) w_i^R = w \wedge w_i \in L(a|b)^* \wedge n > 0\}$, con $\Sigma = \{a, b, \%, \&\}$.

[1] La tira se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Si w es un palíndromo cumple que $w = w^r$

[2] Consejo: discutir según la relación entre los valores de m y n.

[3] Consejo: hallar primero una expresión equivalente para la restricción, utilizando la propiedad distributiva de la conjunción.

[4] Consejo: hallar primero cuál es la mínima cantidad de símbolos que hay que tener en cuenta para que se pueda cumplir la restricción.

Ejercicio 2

Sean las producciones de una gramática G:

$S \longrightarrow aB \mid bA$
$A \longrightarrow a \mid aS \mid bAA$
$B \longrightarrow b \mid bS \mid aBB$

1. Encuentre una derivación de más a la izquierda y una derivación de más a la derecha para la tira $aaabbabbba$.
2. Encuentre un **árbol** de derivación para dicha tira.
3. ¿Es **ambigua** esta gramática? Justifique.

Ejercicio 3

Parte A

Defina **gramática regular**.

Parte B

Cree **gramáticas regulares** que generen los siguientes lenguajes sobre $\Sigma = \{a, b\}$:

1. Tiras cuyo antepenúltimo símbolo de la derecha es una a.
2. Tiras con a los sumo dos b.
3. Tiras con cantidad par de b.
4. Tiras que tienen a lo sumo dos a consecutivas, eventualmente más de una vez.
5. Tiras que tienen exactamente una vez tres a consecutivas.
6. Tiras que contienen al menos una vez la secuencia aba.
7. Tiras que tienen una sola vez la subtira ab o una sola vez la subtira ba. Al igual que en el práctico 1, si encuentra más de una interpretación construya gramáticas para todas ellas.

Parte C

Para los siguientes lenguajes sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$, cree una **gramática lineal izquierda** y una **derecha** que los genere:

1. $L_1 = \{a^m b^n c^j : m > 0 \wedge j > 0 \wedge n \geq 0\}$.
2. $L_2 = \{a^k b^p c^n : n = k \mod 3 \wedge k > 0 \wedge p > 0\}$.

Ejercicio 4

Parte A

Para cada una de las siguientes gramáticas:

- indique si se trata de una **gramática regular** o de una **libre de contexto** justificando su respuesta.
- utilizando los algoritmos vistos en el teórico, halle una gramática simplificada equivalente.

1. $S \longrightarrow aabaX|\epsilon$
   $X \longrightarrow Sabba$
2. $S \longrightarrow Ab \mid aB$
   $A \longrightarrow \epsilon \mid A$
   $B \longrightarrow Bb \mid b$
   $C \longrightarrow C \mid aB$
3. $S \longrightarrow abS \mid A$
   $A \longrightarrow bbaA \mid bB$
   $B \longrightarrow B \mid \epsilon \mid bbb$
4. $S \longrightarrow AB \mid CA$
   $A \longrightarrow a$
   $B \longrightarrow BC \mid AB$
   $C \longrightarrow aB \mid b$
5. $S \longrightarrow aSb \mid aXb|Y$
   $X \longrightarrow ab \mid \epsilon \mid aXb \mid YY$
   $Y \longrightarrow YX \mid XY \mid aZb$
   $Z \longrightarrow Y \mid \epsilon$

Parte B

Para cada una de las **gramáticas regulares** G simplificadas en la parte anterior, construya un **Autómata Finito** M tal que $L(M) = L(G)$.

Ejercicios complementarios

Ejercicio 5

Sean las producciones de una gramática que genera el lenguaje de las expresiones aritméticas con los operadores $\{+, *\}$, con operandos id genéricos[5] y con paréntesis, que sirven para cambiar la prioridad a la hora de evaluar la expresión:

$$E \longrightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid id$$

1. Demuestre que esta gramática es ambigua.
2. Construya una gramática no ambigua equivalente que respete reglas de precedencia y asociatividad usuales de los operadores.

[5] Es decir, no considere todos los operandos posibles, sino uno genérico llamado id.

Ejercicio 6

Cree **gramáticas libres de contexto** que generen los siguientes lenguajes sobre $\Sigma = \{a, b\}$:

1. $L_1 = \{x : x \neq w.w^r \wedge w \in \Sigma^*\}$
2. $L_2 = \{x : x \neq w.w \wedge w \in \Sigma^*\}$

Ejercicio 7

Pruebe que:

1. L es un lenguaje regular $\Longleftrightarrow$ existe una gramática lineal derecha que lo genera.
2. L es un lenguaje regular $\Longleftrightarrow$ existe una gramática lineal izquierda que lo genera.

Consejo: Recuerde que un lenguaje es regular si existe un autómata finito que lo reconoce y, análogamente, si un autómata finito reconoce a un lenguaje entonces él es regular. Intente entonces generar las gramáticas a partir de un autómata que reconozca el lenguaje y viceversa.

Ejercicio 8

Demuestre que las siguientes gramáticas generan a los correspondientes lenguajes:

1. $L_1 = \{a^n b^m a^{n+m} : n \geq 1 \wedge m \geq 1\}$

   $S \longrightarrow aSa \mid aTa$
   $T \longrightarrow bTa \mid ba$

2. $L_2 = \{a^n c^p e^q f^t d^p b^n : n \geq 0 \wedge p \geq 0 \wedge\ t \geq 0 \wedge q \geq 1\}$

   $S \longrightarrow aSb \mid C$
   $C \longrightarrow cCd \mid EF$
   $E \longrightarrow Ee \mid e$
   $F \longrightarrow Ff \mid \epsilon$

3. $L_3 = \{a^n b^k : n \geq 1 \wedge k > n\}$

   $S \longrightarrow aSb \mid aTb$
   $T \longrightarrow Tb \mid aSb \mid b$

4. $L_4 = \{b^p a^{2k} b a^k : p \geq 1 \wedge k \geq 0\}$

   $S \longrightarrow bS \mid bA$
   $A \longrightarrow aaAa \mid b$