Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Funciones de variable compleja.
Curso 2022

Práctico 7 - Residuos

1. Sea $f(z) = \dfrac{z^2+2}{(z^2+9)(z^2+4)}$.

   a) Encontrar los residuos de $f(z)$ en cada uno de sus polos.

   b) Calcular $\int_\gamma f(z)dz$ siendo γ la concatenación del segmento $[-R, R]$ con una semicircunferencia de radio R en el semiplano superior.

   c) Calcular, justificando todos los pasos: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+9)(x^2+4)}\,dx$.

2. Sea $S_R(t) = Re^{it}$ con $t \in [0, \pi/2]$ y γ la curva S_R compuesta con los segmentos $[0, R]$ y $[Ri, 0]$, orientada en sentido antihorario.

   a) Calcular $\int_\gamma \frac{e^{iz}}{1+z^4}dz$.

   b) Probar que $|e^{iz}| \leq 1$ para todo z en el primer cuadrante y deducir que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}\,dz = 0.$$

   c) Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{cos(t) - sen(t)}{1+t^4}dt$.

3. Calcular las siguientes integrales por el método de los residuos, y justificando el procedimiento.

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(a^2+x^2)^3}\,dx$, donde $a > 0$ es constante.

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

4. Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. (Sug. integrar sobre el borde de un sector angular con ángulo $\frac{2\pi}{n}$.)

5. Sea $R(x, y)$ una función racional de 2 variables tal que no se anula el denominador en la circunferencia unitaria.

   a) Probar que

$$\int_0^{2\pi} R(cos\theta, sen\theta)d\theta = -i \int_\gamma R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{z}$$

   siendo γ la circunferencia unitaria recorrida en sentido antihorario.

b) Calcular

1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\operatorname{sen} x}$

2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{\cos x + \cosh a}\, dx$

3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{5-3\cos t}\, dt$

6. Calcular por el método de los residuos, y justificando el procedimiento

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{-p}}{1+x}dx,\ 0<p<1$$

Sugerencia: hay dos formas de encarar este ejercicio. Una forma es seguir el procedimiento de las integrales tipo 4 vistas en el teórico, la integral pedida cae justo en las hipótesis de esas integrales. Otra forma es hacer el cambio de variable $x = u^{1/p}$, esto hace que la integral se transforme en una más sencilla.

7. Sea γ_r una circunferencia de radio r recorrida en sentido antihorario y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que la curva $f \circ \gamma_r$ no pasa por $z = 0$ y da tres vueltas entorno a este punto (es decir, su índice es tres). Probar que f tiene tres ceros en el interior de la circunferencia.

8. Sabiendo que para $C > e$ la ecuación tiene $Cz^n = e^z$ tiene n soluciones en $D = \{|z| < 1\}$, calcular

$$\int_{|z|=1} \frac{20z^4 - e^z}{e^z - 4z^5}dz$$

considerando la curva en sentido antihorario.

Sugerencia: recordar el principio del argumento. Observación: la información brindada en la letra se puede probar utilizando el Teorema de Rouché, pero no se está pidiendo.

9. Sean $A = \{i, 0, -i\}$, $f \in H(\mathbb{C} \setminus A)$ con todos los elementos de A polos de orden uno. Sean γ_1, γ_2 y γ_3 tres caminos como en la figura 1, con $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \pi i$, $\int_{\gamma_2} f(z)dz = 2\pi i$ y $\int_{\gamma_3} f(z)dz = -2\pi i$.

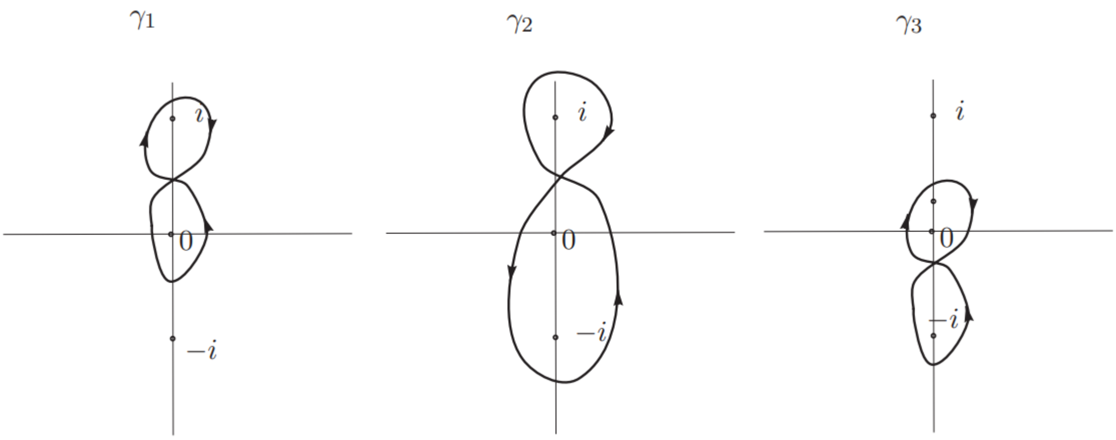

Figura 1: Se observan las curvas γ_1, γ_2 y γ_3.

Se sabe además que $f(1) = 1$ y que $f'(1) = 2$. Calcular

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-1)^2}dz,\ \text{siendo } \Gamma \text{ el camino de la figura 2 .}$$

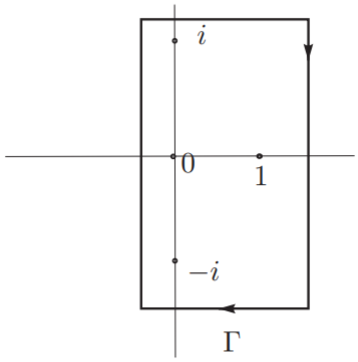

Figura 2: Se observa la curva Γ.

Lema 1 ***Lema de deformación de curvas.***
Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua. Sea para todo $R > 0$ suficientemente grande $S_R \subset \Omega$ el arco de circunferencia $z = z(t) = Re^{it},\ \theta_1 \leq t \leq \theta_2$.

1. *Si $\lim_{z\to\ \infty} zf(z) = L$ entonces*

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)dz = iL(\theta_2 - \theta_1)$$

2. *Si $\lim_{z\to 0} zf(z) = L$ entonces*

$$\lim_{R\to 0} \int_{S_R} f(z)dz = iL(\theta_2 - \theta_1)$$

Lema 2 ***Lema de Jordan.***
Si $f(z)$ es una función compleja continua para todo z tal que $|z| \geq R_0$, que cumple $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ entonces:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} e^{isz} f(z)dz = 0$$

donde $s > 0$ es constante y Γ_R es un arco contenido en la semicircunferencia: $z = Re^{it}, t \in [0, \pi]$.