Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Funciones de variable compleja.
Curso 2022

Práctico 6

Salvo que se indique lo contrario Ω será un región del plano complejo, es decir un conjunto abierto y conexo. Con $\mathcal{H}(\Omega)$ nos referimos a las funciones holomorfas $f : \Omega \to \mathbb{C}$

1. Probar que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z = e^x(cos\ y + i\ sen\ y)$ es la única forma de extender de manera holomorfa la exponencial real al plan complejo. En otras palabras, probar que no existe otra función $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa y tal que $g(z) = e^z\ \forall z \in \mathbb{R}$. Idem para $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $g(z) = cos\ z$.

2. Dar un ejemplo de una función holomorfa en $\mathbb{C}$ con infinitos ceros y no nula.

3. Probar que si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, y $fg \equiv 0$ entonces $f \equiv 0$ o $g \equiv 0$.

4. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que para cada $a \in \mathbb{C}$ se cumple que al menos uno de los coeficientes de la serie de taylor en a es nulo. Probar que f es un polinomio.

5. Sea $f, g \in \mathcal{H}(D)$ siendo D es el disco unitario y tales que no se anulan. Probar que si $\frac{f'}{f}(\frac{1}{n}) = \frac{g'}{g}(\frac{1}{n})\ \forall n$ entonces existe $k \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = kg(z)\ \forall z$.

6. Encontrar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = f(z^2)\ \forall z \in \mathbb{D}$.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

   a) Probar que $f^{(n)}(x) = \frac{p(x)}{q(x)} e^{-\frac{1}{x}}\ \forall x \neq 0$ siendo p y q polinomios.
   b) Probar que $f^{(n)}(0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$
   c) Concluir que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$
   d) Probar que no existe un disco centrado en $x = 0$ donde la serie de Taylor de f en $x = 0$ converga a f en el disco.
   e) Probar que no existe $F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa que extienda f a los complejos.

---

8. Encontrar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que cumplen

   a) $\Omega = \mathbb{C}$, y $|f(z) - e^z \sin(z)| \leq 4\ \forall z \in \mathbb{C}$.
   b) $\Omega = \mathbb{C}$ y $f(z+1) = f(z),\ f(z+i) = f(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$.

9. a) Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Probar que no existe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ no constante y holomorfa en todo $\mathbb{C}$.
   b) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $u(x, y) = Re(f(z))$. Supongamos que existe $M > 0$ tal que $u(x, y) < M$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$. Probar que f es constante.
   Sugerencia: Considerar la función $g(z) = e^{f(z)}$.
   c) Probar que no existe $f : \mathbb{C} \to I$ no constante y holomorfa en todo $\mathbb{C}$, siendo $I = \{z \in \mathbb{C} :\ Im(z) > 0\}$.
   d) Probar que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y su imagen omite un disco (es decir, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ tales que $B(z_0, r) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$) entonces f es constante.

10. Sea f entera y tal que $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ para todo $z \in \mathbb{C}$, con A y B constantes positivas. Demostrar que f es un polinomio.
    Sugerencia: Probar que $f^n(z) = 0$, $\forall n > k$, $\forall z \in \mathbb{C}$ *usando las estimativas de Cauchy.*

---

11. Sean
$$f_1(z) = \frac{sen(z)}{z} \qquad f_2(z) = \frac{1 - cos(z)}{z}$$

    Probar que cero es una singularidad evitable para ambas funciones y concluir que $\int_\gamma f_i(z)dz = 0$, para $i = 1, 2$, para cualquier $\gamma \subset \mathbb{C}$ curva cerrada.

    Nota: Por definición $sen(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ y $sen(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

12. Clasificar las singularidades y los polos de:
$$\frac{z+9}{z^4 - 16} \qquad \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^n} \quad n \in \mathbb{N} \qquad \frac{(z-\pi)}{z^4 sen(z)} \qquad \frac{e^z - 1}{z^4 sen(z)} \qquad sen(\frac{1}{z})$$

13. Sea $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.
    a) Demostrar que f tiene una singularidad esencial en cero.
    b) Probar que dado un conjunto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \theta < Im(z) < \theta + 2\pi\}$ se cumple que $\overline{e^{\Omega}} = \mathbb{C}$.
    c) Verificar que dado $r > 0$ se cumple que $\overline{f(D(0, r))} = \mathbb{C}$. Se sugiere aplicarle la función $1/z$ al disco y luego utilizar la parte anterior.

14. Probar que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa con inversa holomorfa entonces:
    a) $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$
    b) $f(z) = az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$. *Sugerencia: usando lo anterior,* $f(1/z)$ *tiene un polo en* $z = 0$.