Matemática Discreta 2

Soluciones resumidas del examen
27 de Diciembre 2005.

Ejercicio 1 (30 puntos).

(1) (12 puntos) $\begin{cases} ab = 17836 \\ mcm(a,b) = 2548 \end{cases}$ con $a < b$.
De la fórmula $ab = mcd(a,b)mcm(a,b)$, sacamos que $mcd(a,b) = \frac{17836}{2548} = 7$.
Entonces $a = 7a'$ y $b = 7b'$ donde $mcd(a',b') = 1$ y $a'b' = \frac{17836}{49} = 364 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$.
Entonces los posibles pares (a',b') son $(1,364),(4,91),(7,52),(13,28)$ y los posibles pares (a,b) son

$$(7,2548),(28,637),(49,364),(91,196).$$

(2) (10 puntos) $\begin{cases} 7x + 2y \equiv 7(24) \\ 3x - y \equiv 4(24) \end{cases}$ Multiplicamos la segunda fila por 2 y le sumamos la primera, obteniendose que $13x \equiv 15(24)$. Como $mcd(13,24) = 1$ esta ecuación tiene solución:
$24 = 13 + 11,\ 13 = 11 + 2,\ 11 = 2 \cdot 5 + 11 = 11 - 2 \cdot 5 = 11 - (13 - 11) \cdot 5 = 6 \cdot 11 - 13 \cdot 5 = 6 \cdot (24 - 13) - 13 \cdot 5 = 6 \cdot 24 - 13 \cdot 11$, luego módulo 24 el -11 es igual al 13. El inverso de 13 es 13 mod 24. Entonces $13x \equiv 15(24)$ implica que $13 \cdot 13x \equiv 13 \cdot 15(24)$, luego $x \equiv 3(24)$. Sustituyendo en la segunda congruencia del sistema obtenemos $y \equiv 5(24)$.

(3) (8 puntos) $mcd(9,15) = 3$ divide a 600, entonces la ecuación diofantica tiene solucin.
$15 = 9 + 6,\ 9 = 6 + 33 = 9 - 6 = 9 - (15 - 9) = 2 \cdot 9 - 15$.
Entonces: $3 \cdot 200 = 400 \cdot 9 - 15 \cdot 200$.
$x = 400 - 5t$ e $y = -200 + 3t$
$400 - 5t \geq 33$ implica que $t \leq (400 - 33)/5 = 73{,}4$
$-200 + 3t \geq 17$ implica que $t \geq (17 + 200)/3 = 72{,}33$.
Por lo tanto $t = 73$ con lo que $x = 35$ e $y = 19$.

Ejercicio 2 (15 puntos).

(1) (4 puntos) Si $|G| = 121$ entonces para un elemento $a \neq e$ se tiene que $o(a)|121$.
Como $o(a) > 1$ entonces $o(a) = 11$ o bien $o(a) = 121$.
Si $a^k = e$ se tiene que k es múltiplo de $o(a)$ y por lo tanto es múltiplo de 11.
(2) (6 puntos) Si $b = a$ entonces $ba^{10} = aa^{10} = a^{11} = e$.
Si $ba^{10} = e$ entonces $ba^{10}a = ea = a$, $ba^{11} = a$ y como $a^{11} = a$ entonces $b = a$.
(3) (5 puntos) Si G no es cíclico $o(a)$ no puede ser 121 por lo que necesariamente $o(a) = 11$ o $o(a) = 1$.
Entonces $a^{11} = e$ para todo elemento a de G.

Ejercicio 3 (20 puntos).

(4 puntos) Sea $f : G \to \mathbb{Z}$ un homomorfismo sobreyectivo. Entonces $G/K \simeq \mathbb{Z}$ siendo $K = Ker(f)$.
(7 puntos) Los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son de la forma $n\mathbb{Z}$ con n natural y están en correspondencia biyectiva (via el homomorfismo $\tilde{f}$ inducido en el cociente) con los subgrupos de G/K.

Sea el subgrupo $H = f^{-1}(n\mathbb{Z})$, entonces $[G/K : H] = n$.
(5 puntos)Por otro lado sabemos que existe una correspondencia biyectiva entre los subgrupos de G/K y los subgrupos de G que contienen a K (vía la proyección canónica), por lo tanto existe un subgrupo G_1 de G tal que $G_1/K = H$.
(4 puntos) Finalmente $\frac{G/K}{G_1/K} \simeq \frac{G}{G_1}$ y $[G : G_1] = n$.

Ejercicio 4 (20 puntos).
(1) (9 puntos) $\sigma = (126)(457)$, el orden de σ es $o(\sigma) = 3$. Como $266 = 88 * 3 + 2$, entonces $\sigma^{266} = \sigma^2 = (162)(475)$.
(2)(11 puntos) $\tau\sigma\tau^{-1} = \tau(126)(457)\tau^{-1} = \tau(126)\tau^{-1}\tau(457)\tau^{-1} = (\tau(1)\tau(2)\tau(6))(\tau(4)\tau(5)\tau(7))$.
Entonces $\tau(1) = 1, \tau(2) = 2, \tau(6) = 3, \tau(4) = 4, \tau(5) = 5, \tau(7) = 6$ y por lo tanto $\tau(3) = 7$.
Entonces $\tau = (376)$.

Ejercicio 5 (15 puntos).
(1) (3 puntos) Es fácil ver que $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ es un subanillo del anillo $\mathbb{C}$.
Sin embargo, no es ideal porque si bien $3i \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, $\frac{1}{2}(3i) = \frac{3}{2}i \notin \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$
(2) (9 puntos) $\phi((a + bi) + (c + di)) = \phi((a + c) + i(b + d)) = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \phi(a + bi) + \phi(c + di)$.
$\phi((a + bi) \cdot (c + di)) = \phi((ac - bd) + i(bc + ad)) = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & ac-bd \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \phi(a + bi) \cdot \phi(c + di)$.
$Ker(\phi) = \{a + bi \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}/\ \phi(M) = 0_{\mathcal{M}_2}\}$
$= \left\{ M = a + bi \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}/ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{0 + 0i\}$.
(3) (3 puntos) Sea $\psi : \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i \to \mathbb{Z}$ definida como $\psi(a + bi) = a^2 + b^2$.
ψ no es morfismo de anillos pues $\psi(a + bi + c + di) = \psi((a + c) + i(b + d)) = (a + c)^2 + (b + d)^2 = a^2 + c^2 + 2ac + b^2 + d^2 + 2bd$ y $\psi(a + bi) + \psi(c + di) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.