Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Matemática Discreta 2

Primer parcial - 14 de mayo de 2014. Duración: 3 horas y media

Primer parcial - soluciones

Para los ejercicios 1, 5 y 6 ver las notas del teórico.

Ejercicio 2.

a) **Hallar el resto de dividir 11^{1604} entre 1200.**

Como $\varphi(1200) = \varphi(2^4 \cdot 3 \cdot 5^2) = (2^4 - 2^3)2(5^2 - 5) = 320$, se tiene que:

$$11^{1604} = 11^{320 \cdot 5+4} = (11^{(\varphi(1200)^5)} \cdot 11^4 \equiv 11^4 = 121^2 = 14641 = 12000+1200 \cdot 2+241 \equiv 241 \pmod{1200},$$

luego el resto buscado es 241.

b) **Hallar el resto de dividir 7^{319} entre 1200.**

Por la parte *a*) sabemos que: $7^{319} = 7^{320-1} = 7^{\varphi(1200)} \cdot 7^{-1} \equiv 7^{-1} \pmod{1200}$, luego habría que hallar el inverso de 7 módulo 1200.

Para resolver la ecuación $7x \equiv 1 \pmod{1200}$ consideremos la ecuación diofántica: $7x - 1200y = 1$. Tenemos:

(1200)	1	0
(7)	0	1
$1200 = 7 \cdot 171 + 3$	1	-171
$7 = 3 \cdot 2 + 1$	-2	343

por lo que $1 = -2 \cdot 1200 + 343 \cdot 7$ y $x \equiv 343 \pmod{1200}$.

Ejercicio 3.

Una companía compró cierto número de reliquias falsas a 46 pesos cada una y vendió algunas de ellas a 100 pesos cada una. Si la cantidad comprada originalmente es mayor que 400 pero menor que 500 y la companía obtuvo una ganancia de 1000 pesos, ¿cuántas reliquias no se vendieron?

Si y denota a la cantidad de reliquias compradas y x la de vendidas, la ganancia se puede expresar como la resta $100x - 46y$. Luego tenemos que resolver la ecuación diofántica

$$100x - 46y = 1000$$

con la condición de que $400 < y < 500$, y la respuesta, o sea la cantidad de reliquias que no se vendieron, será $y - x$.

Para simplificar, dividimos la ecuación entre 2 y nos queda:

$$50x - 23y = 500. \tag{1}$$

Una solución evidente es $x_0 = 10$ e $y = 0$, luego la solución general tiene la forma: $x = 10 + 23t$ e $y = 50t$, donde t es un número entero, ya que $mcd(50, 23) = 1$. La condición $400 < y < 500$ entonces implica $400 < 50t < 500$. Dividiendo entre 50 esto se reduce a $8 < t < 10$, de donde $t = 9$. Entonces, $x = 10 + 23t = 217$ e $y = 50t = 450$ y quedan: $y - x = 450 - 217 = 233$ reliquias que no se vendieron.

Ejercicio 4.

a) **Hallar todas las soluciones módulo 15 de la ecuación:**

$$6x \equiv 9 \pmod{15}.$$

Como $mcd(6,15) = 3$ la ecuación tiene una única solución módulo $\frac{15}{3} = 5$ y va a tener 3 soluciones módulo 15.

Dividiendo entre 3 obtenemos:

$$2x \equiv 3 \pmod{5}.$$

De aquí:

$$2x \equiv 3 + 5 \pmod{5}$$

luego $x \equiv 4 \pmod{5}$ y $x \equiv 4; 9; 14 \pmod{15}$.

b) **Investigar si el siguiente sistema tiene solución:**

$$\begin{cases} x \equiv 14 \pmod{36} \\ x \equiv 23 \pmod{27} \\ x \equiv 10 \pmod{12} \end{cases}$$

Basta con darse cuenta que la segunda ecuación implica: $x \equiv 23 \pmod{3}$ (ya que $3|27$) lo que se reduce a $x \equiv 2 \pmod{3}$, mientras que la tercera implica $x \equiv 10 \pmod{3}$ (ya que $3|12$) lo que se reduce a $x \equiv 1 \pmod{3}$. Esto es imposible, ya que x no puede ser simultáneamente conguente a 2 y a 1 módulo 3, y el sistema no tiene solución.

c) **Resolver el sistema:**

$$\begin{cases} 5x \equiv 11 \pmod{12} \\ 2x \equiv 5 \pmod{9} \\ x \equiv 9 \pmod{10} \end{cases}$$

Primero nos damos cuenta de que todas las tres ecuaciones tienen única solución con respecto a sus módulos respectivos, ya que $mcd(5,12) = 1 = mcd(2,9)$.

En la primera ecuación tenemos: $5x \equiv 11 \equiv 11 + 2 \cdot 12 = 35 \pmod{12}$, luego $x \equiv 7 \pmod{12}$, ya que $mcd(5,12) = 1$.

En la segunda tenemos: $2x \equiv 5 \equiv 5 + 9 = 14 \pmod{9}$, luego $x \equiv 7 \pmod{9}$, ya que $mcd(2,9) = 1$.
Ahora nos queda resolver el sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{12} \\ x \equiv 7 \pmod{9} \\ x \equiv 9 \pmod{10} \end{cases}$$

La primera ecuación es equivalente a: $x \equiv 7 \pmod{3}$ y $x \equiv 7 \equiv 3 \pmod{4}$ ($\Rightarrow x \equiv 1 \pmod{2}$).

La segunda implica: $x \equiv 7 \pmod{3}$.

La tercera es equivalente a: $x \equiv 9 \equiv 1 \pmod{2}$ y $x \equiv 9 \equiv 4 \pmod{5}$.

Entonces, es suficiente resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 7 \pmod{9} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \end{cases}$$

Resolviendo las primeras dos ecuaciones tenemos:

$$x = 3 + 4k \equiv 7 \pmod 9$$

luego

$$4k \equiv 4 \pmod 9 \quad \Rightarrow k \equiv 1 \pmod 9$$

ya que $mcd(4,9) = 1$. Entonces, $k = 1 + 9t$ y $x = 3 + 4k = 3 + 4(1 + 9t) = 7 + 36t$. Agregando la tercera ecuación tenemos:

$$7 + 36t \equiv 4 \pmod 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + t \equiv 4 \pmod 5.$$

Entonces, $t \equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow t = 2 + 5s \Rightarrow x = 7 + 36t = 7 + 36(2 + 5s) = 79 + 180s$, luego $x \equiv 79 \pmod{180}$.