Matemática Discreta 2
Curso 2013

Primer parcial

Ejercicio 1)

Sea S_a el sistema de congruencias

$$S_a \begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 5 \pmod{11} \\ x \equiv a \pmod{21} \end{cases}$$

a) Hallar el mínimo $a \in \mathbb{N}$ para que el sistema S_a tenga solución.

b) Determinar la solución del sistema para el a hallado en la parte anterior y probar que la solución es única módulo 231.

Ejercicio 2)

a) Dado $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ con $\alpha_i \geq 1$ y p_i primos para todo $i = 1, \dots, t$, determinar el número de divisores y demostrar el resultado.

b) Probar que, si un número es un cubo perfecto, entonces su cantidad de divisores positivos es congruente con 1 módulo 3.

c) ¿Es cierto el recíproco? Caso afirmativo: demostrarlo. Caso ne-gativo: dar contraejemplo.

d) Se tiene un tablero de 18×20 casillas y se ponen granos de arroz en las casillas de modo que todas tengan la misma cantidad. ¿Cuál es la menor cantidad de granos que se deben colocar en cada casilla para que la cantidad total de granos sea un cubo perfecto?

Ejercicio 3)

Sea ϕ la función de Euler.

a) Demostrar que $\phi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$ para p primo y $n \geq 1$.

b) Sean $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$ y $n = p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} p_4^{\beta_4}$ donde los p_i son primos para $i = 1, 2, 3, 4$, $\alpha_i \geq 1$ para $i = 1, 2, 3$, $\beta_i \geq 1$ para $i = 2, 3, 4$, $\alpha_2 \leq \beta_2$ y $\beta_3 < \alpha_3$.

b)1) Hallar $d = mcd(m, n)$.

b)2) Probar que $\phi(mn) = \frac{\phi(m)\phi(n)d}{\phi(d)}$.

c) Calcular $10 \cdot 17^{2306} (\mathrm{mod}\ 60 \cdot 42)$.