1er parcial de Matemática Discreta II
Lunes 13 de mayo de 2002

Parcial No.	Apellido y nombre	Cédula

- El parcial consta de 5 preguntas y dura **3 horas**. Todas las preguntas son de desarrollo y valen 8 puntos.
- El parcial es "con material". Es decir, se permite el uso de calculadoras y la consulta de libros o apuntes.
- La letra y respuestas a las preguntas se publicaran en la cartelera del IMERL y en la página web de la materia el jueves 16 a las 11:00 am.

¡Buena suerte!

Problema 1

a) **(4 Puntos)** Hallar x entre 0 y 21 inclusive tal que $x \equiv 5^{2002} \pmod{22}$.

b) **(4 Puntos)** Hallar y entre 0 y 22 inclusive tal que $y \equiv 13^{5^{2002}} \pmod{23}$.

Problema 2

a) **(3 Puntos)** Hallar $MCD(a,b)$ sabiendo que $MCD(a,b).mcm(a,b) = 48$ y que $a^2 = b^2 + 28$.

b) **(5 Puntos)** ¿Existe algún múltiplo de 28 cuyas dos últimas cifras sean 16?. En caso afirmativo, hallar una fórmula para ellos.

Problema 3 (8 Puntos) Sean H y K subgrupos de un grupo G. Demostrar que HK es un subgrupo de G si y solo si $HK = KH$.

Aclaración: Le recordamos que HK se define como el conjunto de todos los productos posibles de la forma hk con $h \in H$ y $k \in K$.

Sugerencia: Puede serle de utilidad considerar el inverso de un elemento genérico de HK.

Problema 4 Sean H y K dos subgrupos normales y finitos de un grupo G, tales que

$$MCD(|H|\,,|K|) = 1.$$

a) **(3 Puntos)** Demostrar que $hk = kh \forall h \in H, k \in K$. (*Sugerencia:* Considere el elemento $hkh^{-1}k^{-1}$)

b) **(5 Puntos)** Demostrar que la función $f : H \times K \longrightarrow HK$ definida por $f((h,k)) = hk$ es un isomorfismo de grupos.

Aclaración: $H \times K$ es el grupo cuyos elementos son las parejas ordenadas (h,k) del producto cartesiano de H por K con la operación $(h,k)(h',k') = (hh',kk')$.

Problema 5 Sea $a > 0$ y Γ el conjunto formado por las siguientes biyecciones de $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ en si mismo:

$$\varphi_1(z) = z, \qquad \varphi_2(z) = \frac{1}{1-z}, \qquad \varphi_3(z) = \frac{z-1}{z},$$
$$\varphi_4(z) = \frac{a}{z}, \qquad \varphi_5(z) = 1-z, \qquad \varphi_6(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Se sabe que $(\Gamma, \circ)$ es un grupo.

a) **(2 Puntos)** Hallar a.

b) **(2 Puntos)** Escribir la tabla de composición de estas funciones.

c) **(2 Puntos)** Hallar el orden de cada elemento de Γ.

d) **(2 Puntos)** ¿Es $\{\varphi_1, \varphi_4\}$ un subgrupo normal de Γ? Justificar.