Martes 12 de mayo de 1998.

# Primer parcial de Matemática Discreta 2

---

*APELLIDOS* *NOMBRE* *$N^o$ DE CEDULA*

1. En $\mathbb{Z}_{64}$, ¿existe $5^{-1}$; existe $10^{-1}$? En el (los) caso(s) afirmativo(s) hallarlo(s).

2. Hallar todos los divisores de cero en $\mathbb{Z}_{24}$. Resolver la ecuación $x^2 = 0$ en $\mathbb{Z}_{24}$.

3. Investigar si 257 es un número primo. Calcular $3^{9990}\, mod\, 257$. Mostrar todos los cálculos y métodos usados.

4. Hallar el menor entero positivo que dividido por 3 da resto 1, dividido por 4 da resto 3 y dividido por 7 da resto 5. Mostrar todos los cálculos y métodos usados.

5. Juan tenia \$198 que gastó totalmente en comprar refrescos, que valen \$14 la unidad, y paquetes de papitas que valen \$18 la unidad. Si compró de **ambos** productos, ¿cuántos refrescos y cuántos paquetes de papitas compró?
   Todas las respuestas deben estar justificadas.

6. Se considera el anillo $\mathbb{Z}_{2^n}$ de los enteros módulo $2^n$.

   (a) Hallar el número de invertibles de $\mathbb{Z}_{2^n}$.

   (b) Sea $N = \{b \in \mathbb{Z}_{2^n} \,/\, b$ **no** es invertible $\}$.
   Probar que si $b \in N$ entonces $b$ es nilpotente (se recuerda que $b$ se dice nilpotente de índice $k > 0$ si $b^k = 0$ y $b^{k-1} \neq 0$).

   (c) Probar que si $b$ en $\mathbb{Z}_{2^n}$ es nilpotente de índice $k$ entonces $1+b$ es una unidad de $\mathbb{Z}_{2^n}$ y vale $(1+b)^{-1} = 1 - b + b^2 - b^3 + \cdots + (-1)^{k-1}b^{k-1}$

   (d) Hallar el inverso de 65 en $\mathbb{Z}_{4096} = \mathbb{Z}_{2^{12}}$.

7. (a) Sea $A$ un anillo con unidad. Mostrar que si $x$ e $y$ son elementos de $A$ que tienen inversos multiplicativos entonces $xy$ e $yx$ también lo tienen.

   (b) Se considera $x = 1 + \sqrt{2}$ perteneciente al anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \,/\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ con las operaciones

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = a + c + (b + d)\sqrt{2}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2}$$

   Mostrar que $x$ tiene inverso multiplicativo en ese anillo. Idem con $x^2$. Mostrar que en ese anillo existen infinitos elementos que tienen inverso multiplicativo.

   (c) Hallar $b \neq 0$, $b \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ que no tenga inverso multiplicativo en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ¿Puede ser $b$ divisor de cero?. Justificar la respuesta.