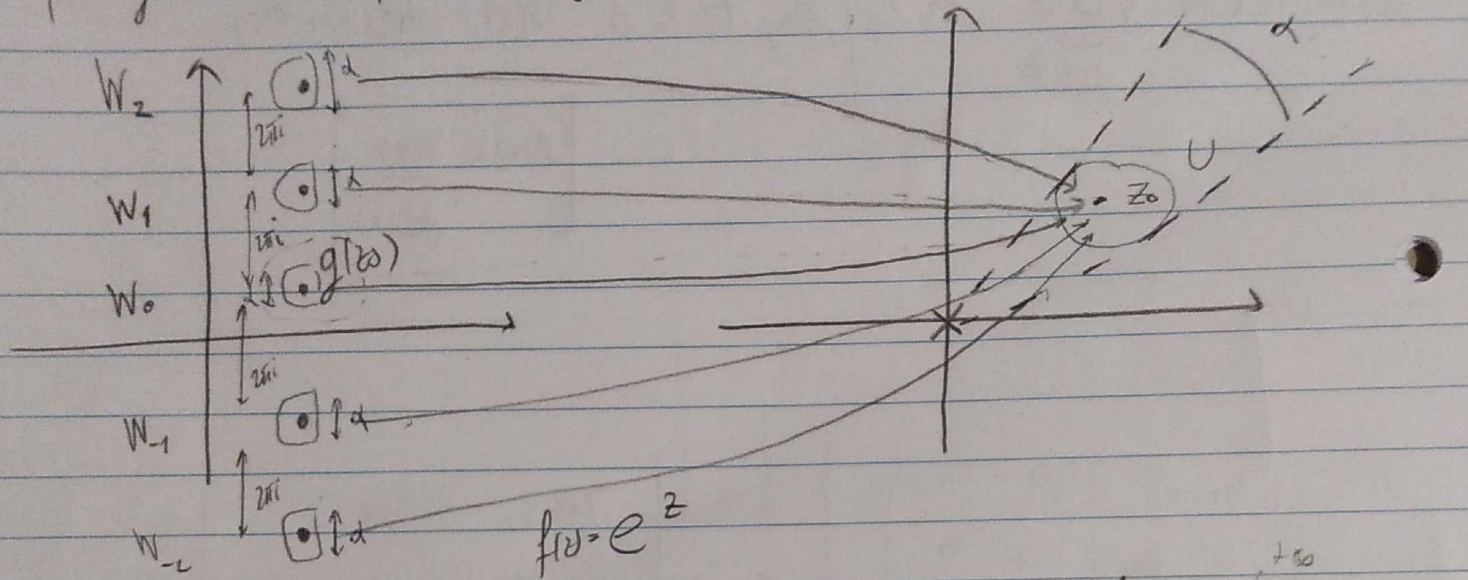
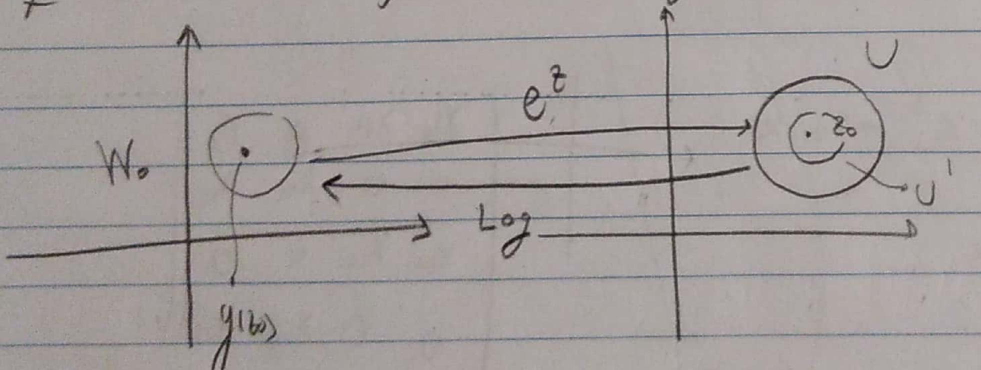
Sea $g : \mathbb{C}-\{0\} \to \mathbb{C}$ continua y tal que $e^{g(z)} = z \ \forall z$, y sea $z_0 \in \mathbb{C}-\{0\}$.

El hecho de que $e^{g(z_0)} = z_0$ quiere decir que $g(z_0)$ es una de las infinitas preimágenes de z_0 por e^z. Figura:



Sea U un entorno de z_0 como en la figura. Se cumple que $f^{-1}(U) = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} W_i$ unión de infinitos abiertos, y además $f : W_i \to U$ es invertible.
Llamemosle W_0 el abierto que tiene a $g(z_0)$ y sea $\operatorname{Log} : U \to W_0$ el logaritmo que es inversa de $f : W_0 \to U$. Figura:



Todo esto significa que $e^{\log(z)} = z \ \forall z \in U$ pero también que $\log e^w = w$ $\forall w \in W_0$.

Sea $U' \subset U$ tal que $g(U') \subset W_0$ (existe porque g es continua).

Ahora si $z \in U'$ se sigue que $g(z) \in W_0 \Rightarrow \log \underbrace{e^{g(z)}}_{z} = g(z)$

$\Rightarrow \log(z) = g(z) \ \forall z \in U'$. Es decir, g y $\log$ coinciden en U', en particular g es holomorfa.