Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Funciones de variable compleja.
Curso 2022

Práctico 5 - Integración en el plano complejo, teoría de Cauchy.

Salvo que se indique lo contrario Ω será un región del plano complejo, es decir un conjunto abierto y conexo.

1. Calcular $\int_\gamma f(z)\,dz$ en los siguientes casos:

   a) $f(z) = e^z$ siendo $\gamma(t) = (e^t - 1)(e^t - e^\pi) + i \operatorname{sen} t,\ 0 \leq t \leq \pi$.

   b) $f(z) = z^m \overline{z}^n$ siendo $\gamma(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$, con m y n enteros.

   c) $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = i + 3e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ y $f(z) = \dfrac{1}{z^2+9}$.

   d) $f(z) = \frac{z+2}{z}$, $\gamma(t) = 2e^{it}, t \in [0, \pi]$.

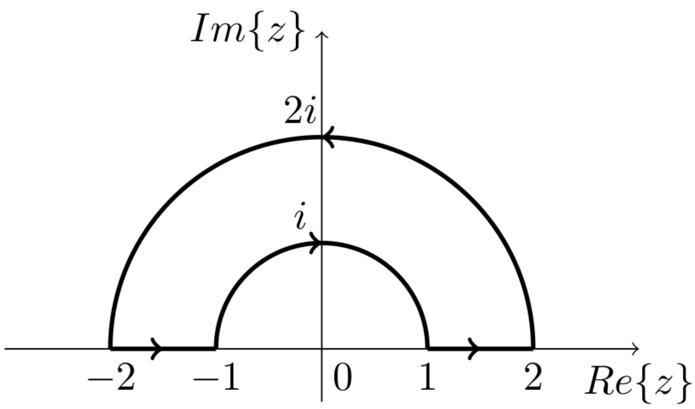
   e) $f(z) = \frac{z+2}{z}$, $\gamma(t) = 2e^{it}, t \in [0, \pi]$.

   f) $f(z) = 1/z, \gamma(t) = 5e^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

   g) $f(z) = 1/z$, con γ una curva cualquiera en el semiplano superior que conecta 5 con -5.

   h) $f(z) = \sin z$, $\gamma(t) = t + it^2, t \in [0, 1]$.

2. Calcular $\int_\gamma |z|\overline{z}\,dz$ donde γ es la curva de la figura.



3. Sea γ el arco de la circunferencia $|z| = 2$ recorrido en sentido anti-horario desde $z = 2$ hasta $z = 2i$. Probar que $\left| \int_\gamma \dfrac{dz}{z^2+1} \right| \leq \dfrac{\pi}{3}$.

4. *a)* Probar que no existe una función $g : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorfa con $g'(z) = 1/z$.

   b) Demostrar que si existe una función continua $g : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$ entonces coincide localmente con las funciones logaritmo clásicas, y por lo tanto g es holomorfa. Concluir que no puede existir dicha g.

5. Si f es continua en un entorno de $z = a$, mostrar que

$$\lim_{r \to 0} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 2\pi i f(a).$$

6. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de Ω en $\mathbb{C}$. Demostrar que si f_n converge uniformemente a f en todo compacto $K \subseteq C$ entonces para toda curva regular γ se cumple que $\int_\gamma f(z)dz = \lim_n \int_\gamma f_n(z)dz$

7. Calcular la integral $\int_C \frac{z}{z^2+4} dz$ donde C es la circunferencia de centro 0 y radio 16

8. Calcular $\int_{z=1} e^z z^{-n} dz$ y $\int_{z=2} z^n (1-z)^m dz$. *Sugerencia: recordar el teorema de Cauchy y la fórmula de Cauchy para derivadas.*

9. Considere γ el cuadrado de vértices $\pm 2, \pm 2i$ recorrido en sentido antihorario. Calcular:

$$a)\ \int_\gamma \frac{e^{-z}}{z - \pi/2}\, dz \qquad b)\ \int_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\, dz \qquad c)\ \int_\gamma \frac{z}{2z+1}\, dz \qquad d)\ \int_\gamma \frac{\cosh z}{z^4}\, dz$$

10. Sea $K \subset \mathbb{C}$ un subconjunto cerrado tal que $\mathbb{C} - K$ es simplemente conexo y $0 \in K$. Sea $w_0 \in \mathbb{C} - K$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $e^{z_0} = w_0$. Probar que existe una única función holomorfa $g : \mathbb{C} - K \to \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = z$.