G finito, $x, y \in G$: $xy = yx$. Probar que $\exists z$

Probar que $\exists z$: $\theta(z) = mcm(\theta(x), \theta(y))$

Idea: Podría ser $x \cdot y$

$$(xy)^{mcm(\theta(x),\theta(y))} =$$

$$= x^{mcm(\theta(x),\theta(y))} \, y^{mcm(\theta(x)\,\theta(y))}$$

$\Rightarrow (xy)(xy)(xy)\cdots(xy) = xxx\cdots xyyy\cdots y$

como $xy = yx$

puedo ir cambiando de lugar las x con las y para que queden todas las x a la izquierda y todas las y a la derecha

$$\sigma(x) \mid \mathrm{mcm}(\sigma(x), \sigma(y))$$

$$\sigma(y) \mid \mathrm{mcm}(\sigma(x), \sigma(y))$$

$$x^{\mathrm{mcm}(\sigma(x),\sigma(y))} = e$$

$$y^{\mathrm{mcm}(\sigma(x),\sigma(y))} = e$$

$\Rightarrow$ el producto de ellos da e

$$\Rightarrow \sigma(xy) \mid \mathrm{mcm}(\sigma(x), \sigma(y))$$

Sea k: $x^k y^k = e$, $k < mcm(\theta(x), \theta(y))$

podemos tratar de llegar al absurdo desde acá

o probar que necesariamente

$\theta(x) \mid k$, $\theta(y) \mid k \Rightarrow mcm(\theta(x), \theta(y)) \mid k$

Igual es falso: en el medio Benjamin descubrió que

si $x = y^{-1} \Rightarrow xy = e$, $\theta(xy) = 1$

y podemos tomar x, y con $\theta(x) > 1$.

En el caso $x = y^{-1}$

$o(x) = o(y) \Rightarrow \operatorname{mcm}(o(x), o(y)) = o(x)$
$= o(y)$

Podemos tomar $z = x$ o $z = y$ . . -

<u>Otra idea</u>: usar la parte a)

Sean $r, s \in \mathbb{N}$. Probar que $\exists\, a, b$

$a \mid r$, $b \mid s$ y $\operatorname{mcm}(r, s) = ab$, a y b coprimos

- Si g y h conmutan, y $o(g)$ y $o(h)$ son coprimos:

$\Rightarrow o(gh) = o(g)\,o(h)$

Chiara encontró z en el caso en que $\theta(x)$ y $\theta(y)$ son coprimos

$z = xy$ sirve

por esto

porque $\theta(xy) = \theta(x)\cdot\theta(y)$

$$= \operatorname{mcm}(\theta(x),\theta(y))\cdot \overbrace{\operatorname{mcd}(\theta(x)\,\theta(y))}^{=1}$$

Siguiendo con lo de la parte a:

si $r=\theta(x)$, $s=\theta(y) \Rightarrow \exists\, a,b\in\mathbb{N}$

$a\,|\,\theta(x)$, $b\,|\,\theta(y)$, $\operatorname{mcm}(\theta(x),\theta(y)) = a\cdot b$

a y b son coprimos

Si encontramos $g : o(g) = a$, $h : o(h) = b$.

ya estaria, porque $o(g)$ y $o(h)$ son coprimos

$$\Rightarrow o(gh) = o(g)o(h) = ab = mcm(o(x), o(y))$$

Por ejemplo $g = x^{\frac{o(x)}{a}}$

la minima potencia de x queda e

$$g^a = x^{o(x)} = e$$

y si $k < a$, $g^k = x^{\frac{o(x)}{a} \cdot k}$

$$\frac{k}{a} < 1 \Rightarrow \frac{o(x)}{a} k < o(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{\frac{o(x)}{a} k} \neq e \Rightarrow g^k \neq e$$

Por todo esto $o(g) = a$ ✓

Se puede visualizar también usando el isomorfismo que decía Francisco:

si $o(x) = n$, $\langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$

acá hay elementos del orden que quieras, que sea divisor de n

Análogamente, $h = y^{\frac{o(y)}{b}}$

y tomamos $z = gh$