$f: \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ morfismo de grupos

$\mathbb{Z}_2$ tiene un elemento de orden 1, el $\bar{0}$
y un elemento de orden 2, el $\bar{1}$

$\mathbb{Z}$ tiene un elemento de orden 1, el 0
y todos los otros elementos
tienen orden infinito.

Propiedad: $o(f(a)) \mid o(a)$

Si $n = o(a) \Rightarrow a^n = e$

$\Rightarrow f(a)^n = f(a^n) = f(e) = e \Rightarrow o(f(a)) \mid n$

El ejercicio: $f(\bar{0}) = 0$ (neutros), $o(f(\bar{1})) \mid o(\bar{1}) = 2 \Rightarrow f(1) = 0$
$\Rightarrow f$ es trivial.

Usamos que los órdenes de los elementos del dominio son todos finitos,
y los órdenes de los elementos del codominio son todos infinitos salvo el de 0

En general no hay morfismos de grupos no triviales $f: G \to \mathbb{Z}$ para ningún grupo finito G

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ $\quad f(x) = (0, x)$

infinito

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad$ está f trivial

$f = id$

$f(x) = -x$ ¿es morfismo de grupos?

sean $x, y \in \mathbb{Z}$

$f(x+y) = -(x+y)$

$f(x) + f(y) =$
$= (-x) + (-y)$

iguales

Idea: $f = id$ salvo intercambiar dos elementos

$f(2) = 3$, $f(3) = 2$ por ejemplo

¿es morfismo de grupos?

tendría que ser $f(-2) = -3$, $f(-3) = -2$

tomando $x = 2$, $y = 2$

$f(2+2) = f(4) = 4$, $f(2) + f(2) = 3+3 = 6$

---

otra idea $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $f(x) = k \cdot x$ ($k \in \mathbb{Z}$ cualquiera)

$f(x+y) = k(x+y)$, $f(x) + f(y) = k \cdot x + k \cdot y$

son iguales $\Rightarrow$ f es morfismo de grupos. Prueben que son todos

14a) $f : \mathbb{Z}_7 \longrightarrow S_6$ morfismo de grupos

Fijarse si hay alguna f que no sea trivial (o si el morfismo trivial es el único que hay)

$S_6 = \{\sigma : \{1, .., n\} \to \{1, .., n\} : \sigma$ es biyectiva$\}$

$= \{$permutaciones de n elementos$\}$

$|S_6| = 6!$ $\qquad\qquad \theta(f(a)) \mid \theta(a)$

$|\mathbb{Z}_7| = 7 \longrightarrow$ son coprimos

Prop: si $|G|$ y $|K|$ son coprimos

$\Rightarrow$ no hay $f: G \to K$ morfismo de grupos no trivial

Dem: Idea: Teo. de los órdenes,

$$|G| = |\mathrm{Ker} f| \cdot |\mathrm{Im} f| \Rightarrow |\mathrm{Im} f| \mid |G|$$

$$\mathrm{Im} f < K \Rightarrow |\mathrm{Im} f| \mid |K| \quad \text{(Lagrange)}$$

Idea: f es trivial $\Leftrightarrow \mathrm{Im} f = \{e\} \Leftrightarrow |\mathrm{Im} f| = 1$

$|\mathrm{Im} f|$ divide a $|G|$ y a $|K|$, que son coprimos

$\Rightarrow |\mathrm{Im} f| = 1$, así que f sólo puede ser trivial

Obs: Si $G = \langle g \rangle$, $o(f(g)) \mid o(g)$

Con encontrar un elemento $x \in K$ tal que $o(x) \mid o(g)$,

puedo definir $f : G \to K$ tal que $f(g) = x$

14 b) Queremos $f : \mathbb{Z}_8 \longrightarrow U(24)$ no trivial

Alcanza con encontrar un elemento de $U(24)$ con orden 2, 4 u 8

Llamémoslo x, intentemos encontrar x con $o(x) = 2$, esto es $\overline{x}^2 = \overline{1}$ en $U(24)$

$x^2 \equiv 1 \pmod{24}$ por ejemplo $x = 5$, defino $f(\overline{1}) = \overline{5}$

Todos los elementos no triviales de $U(24)$ tienen orden 2.

Para cada uno de ellos puedo definir

$$f(\bar{i}) = \begin{cases} \bar{x} & \text{si } \bar{i} \text{ es impar} \\ \bar{1} & \text{si } \bar{i} \text{ es par} \end{cases}$$

Hay 7 elementos no triviales, entonces hay 7 morfismos no triviales destintos entre $\mathbb{Z}_8$ y $U(24)$

Porque una vez que fijaste $f(\bar{1}) = \bar{x}$

$f(\bar{2}) = f(\bar{1}+\bar{1}) = f(\bar{1}) \cdot f(\bar{1}) = \bar{x}^2$, $f(\bar{3}) = \bar{x}^3$, ...

14d) $f: U(15) \longrightarrow \mathbb{Z}_6$ no trivial.

$$U(15) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$$

Ideas: ① órdenes de los elementos

puede ser 1, 2, 4 u 8

$o(a) \mid |G|$

clase	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\overline{11}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
orden	1	4	2	4	4	2	4	2

$$|\langle \bar{2} \rangle| = o(\bar{2}) = 4 \Rightarrow \langle \bar{2} \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$$

$\cap$ en $U(15)$

$$\bar{7} \cdot \bar{7} = \overline{49} = \bar{4}$$

$$\bar{7}^4 = \bar{4}^2 = \bar{1}$$

$$o(\bar{7}) = 4$$

$$\overline{13} \cdot \overline{13} = \overline{169} = \bar{4}, \; o(\overline{13}) = 4$$

$$\overline{14} \cdot \overline{14} = \bar{4} \cdot \overline{49} = \bar{4} \cdot \bar{4} = \overline{16} = \bar{1}$$

Empezamos a buscar

$f(\bar{2})$ ¿qué puede ser?

Sabemos que $\theta(f(2)) \mid \theta(2)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\; \shortparallel$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\; 1 \text{ o } 2$

intentamos

qué pasa si elegimos $f(\bar{2}) = \bar{3}$ (que tiene orden 2)

Esto determina el valor de f en $\langle \bar{2} \rangle$

$$f(\bar{4}) = f(\bar{2}\cdot\bar{2}) = f(\bar{2}) + f(\bar{2}) = \bar{3} + \bar{3} = \bar{0}$$

$$f(\bar{8}) = f(\bar{2}^3) = f(\bar{2}) + f(\bar{2}) + f(\bar{2}) = \bar{3} + \bar{3} + \bar{3} = \bar{3}$$

$f(\bar{7})$ puede tener orden 1, 2 ó 4

puede valer $\bar{0}$ ó $\bar{3}$

$f(\bar{7}^2) = f(\bar{7}) + f(\bar{7})$ siguen sirviendo $\bar{0}$ y $\bar{3}$

$\shortparallel$

$f(\bar{4}) = \bar{0}$

porque $\bar{3} + \bar{3} = \bar{0}$

$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$

$f(\bar{7}^3) = \underbrace{f(\bar{7}) + f(\bar{7})}_{0} + f(\bar{7})$

$\shortparallel$

$f(\overline{13})$

$f(\overline{11}) = f(\overline{13} \cdot \bar{2})$

$= f(\overline{13}) + f(\bar{2})$

$= f(\bar{7}) + f(\bar{2})$

$f(\overline{14}) = f(\bar{2}\,\bar{7}) = f(\bar{2}) + f(\bar{7})$

② Me parece que eligiendo $f(\bar{2})$ y $f(\bar{7})$ ya está determinado el morfismo, y funciona. (verificarlo)

Ejemplo $f(\bar{2}) = \bar{3}$, $f(\bar{7}) = \bar{0}$

$f(\bar{4}) = \bar{0}$ $\quad$ $f(\overline{13}) = \bar{0}$

$f(\bar{8}) = \bar{3}$ $\quad$ $f(\overline{11}) = \bar{3}$

$f(\overline{14}) = \bar{0}$

coherente con decir que $f(\bar{2})$ y $f(\bar{7})$ determinan f.

(otra idea)

② Resolverlo usando que $U(15) \simeq \underset{\langle \bar{2} \rangle}{U(3)} \times \underset{\langle \bar{2} \rangle}{U(5)}$

$\bar{2} \longleftrightarrow (\bar{2}, \bar{1})$

$\bar{7} \longleftrightarrow (\bar{1}, \bar{2})$