85) G un grupo sin subgrupos no triviales.

+cuelgue

Probar que G es cíclico, finito y |G| es primo o es 1

* Grupos de un elemento son todos isomorfos

$G = \{e\}$ $e \cdot e = e$ (no hay forma de definir otra cosa

* Grupos de dos elementos

Uno de ellos es neutro, lo llamamos e

al otro lo llamamos n. $e \cdot e = e$ } porque
$e \cdot n = n \cdot e = n$ } e neutro

¿$n \cdot n$? Bueno, n tiene que tener inverso, $n^{-1} = e$ no puede ser (porque $en = n \neq e$)

$\Rightarrow n \cdot n = e \Rightarrow$ todos los grupos de 2 elementos son isomorfos

Ejemplos de grupos con 2 elementos

$\mathbb{Z}_2 = (\{\bar{0}, \bar{1}\}, +)$ $\quad U(3) = (\{\bar{1}, \bar{2}\}, \cdot)$

Ejemplos (I)

$\mathbb{Z}_3 \; (e = \bar{0},\ n = \bar{1},\ m = \bar{2})$

obs. Hay un isomorfismo $f: G \to G$

$f(e) = e, \quad f(n) = m$

$f(m) = n$

(8) Grupos de tres elementos

$\{e, n, m\} \qquad e \cdot x = x \cdot e = x.$

Falta ver $n \cdot n,\ n \cdot m,\ m \cdot n,\ m \cdot m$

n^{-1} puede ser n ó m

(II) (I)

(I) $n^{-1} = m \Rightarrow mn = nm = e,\ n \cdot n \neq n$ (si no, cancelo y $n = e$)

$\neq e$ (si no $n = n^{-1}$)

entonces $n \cdot n = m$, y análogamente $m \cdot m = n$

(II) $n = n^{-1}$, $n \cdot n = e$

En este caso $\{e, n\}$ sería un subgrupo no trivial de G.

Primero que nada, ya no está dentro de las hipótesis del ejercicio.

Pero además podemos afirmar que no existe ningún G que cumpla esto:

Una forma: ¿Qué elemento es $n \cdot m$?

$nm \neq e$ (si no, $m = n^{-1}$)

$nm \neq m$ (si no, $n = e$)

$nm \neq n$ (si no, $m = e$)

Otra forma: $|\{e, n\}| = 2$, $|G| = 3$ pero $2 \nmid 3$ (contradice Lagrange)

8 Grupos con 4 elementos

$\{e, n, m, l\}$ $\qquad e \cdot x = x \cdot e = x$ ya sabemos

Tenemos que averiguar el resultado de 9 multiplicaciones.

¿qué puede ser n^{-1}? $n^{-1} = n$ tendríamos $\{e, n\} < G$ no trivial

$n^{-1} = m$, $m^{-1} = n$ y l^{-1} tiene que ser $l \Rightarrow \{e, l\} < G$ no trivial.

$n^{-1} = l$ análogo.

No hay grupos con 4 elementos que sólo tengan subgrupos triviales

Ejemplos de grupos con 4 elementos:

$U(5) = (\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}, \cdot)$ 5 es primo.

$\varphi(5) = 5 - 1 = 4$

$\mathbb{Z}_4 = (\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}, +)$

Son isomorfos. $f : U(5) \longrightarrow \mathbb{Z}_4 : f(\bar{2}) = \bar{1}$

es un isomorfismo.

Podemos construir f sólo con este dato

porque $\bar{2}$ genera $U(5)$

$f(\bar{2} \cdot \bar{2}) = f(\bar{2}) + f(\bar{2}) = \bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$.

entonces $f(\bar{4}) = \bar{2}$

De la misma forma hacemos $f(\bar{3}) = \bar{3}$

Hay otro grupo de 4 elementos: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

(se llaman grupo de Klein)

Se puede probar que cualquier grupo de 4 elementos es isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ ó a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$n = (\bar{1}, \bar{0})$

$m = (\bar{0}, \bar{1})$

$l = (\bar{1}, \bar{1})$

Si hay un elemento de orden 4 $\Rightarrow$ es cíclico.

Si no, hay un elemento de orden 1 (el neutro) y tres elementos de orden 2: n, m, l.

$n = n^{-1}$, $m = m^{-1}$, $l = l^{-1}$, $n \cdot m = l$, etc.

/

(f) Grupos de 5 elementos: $(\mathbb{Z}_5, +)$

como $|H| \,\Big|\, |G|$ si $H < G \Rightarrow |H| = 1 \quad (H = \{e\})$

ó $|H| = 5 \quad (H = G)$

Pasa lo mismo con todos los primos.

El mismo argumento de que $o(x) = 1$ ó 5

$o(x) = |\langle x \rangle| \,\Big|\, |G| = 5$

$\Rightarrow$ cualquier elemento que no sea e, genere G. $\Rightarrow G$ es ciclico

Ahora, el ejercicio:

Si $|G| = 1$, es el caso que hay.

Si no, sea $x \neq e$

$\langle x \rangle$ es un subgrupo de G

y $\langle x \rangle \neq \{e\}$ (porque tiene a x)

$\Rightarrow \langle x \rangle = G$ (si no, sería un subgrupo no trivial)

$\Rightarrow$ G es cíclico.

G es cíclico, $G=\langle x\rangle$ $\to$ $o(x)=n \Rightarrow G\cong \mathbb{Z}_n$

$G=\{e, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$, $e = x^n$

$\to$ $x^k \neq e \ \forall k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0$

$G=\{e, x, x^{-1}, x^2, x^{-2}, x^3, x^{-3}, \dots\}$

$G\cong\mathbb{Z}$

Podemos tratar de descartar $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_n$, con n no primo, encontrándoles subgrupos no triviales

Con $G = \mathbb{Z}$, tenemos

$$\langle 2 \rangle = \{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \ldots\}$$
$$= 2\mathbb{Z} = \text{los pares}$$

es un subgrupo de $\mathbb{Z}$ no trivial

Con $G = \mathbb{Z}_n$, con n no primo,

Ej: $G = \mathbb{Z}_4$ tiene $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ como subgrupo no trivial.

$G = \mathbb{Z}_6$ tiene $\langle \bar{3} \rangle = \{0, \bar{3}\}$ como subgrupo no trivial

Si n es par, $= \langle \overline{\frac{n}{2}} \rangle = \{ \bar{0}, \overline{\frac{n}{2}} \} < \mathbb{Z}_n$

no trivial

Si n no es primo, tomemos $p^k | n$ $\quad n = h \cdot p^k$

$\langle \overline{p^k} \rangle = \{ 0, \overline{p^k}, \overline{2p^k} \quad \}$ tiene h elemento

$\overline{0} = \overline{h p^k}$ es un subgrupo no trivial

En general, cualquier $d | n$, $d \neq n$

nos permite tomar $\langle \bar{d} \rangle = \{ 0, \bar{d}, \overline{2d}, \ldots \}$, que tiene $\frac{n}{d}$ elementos.