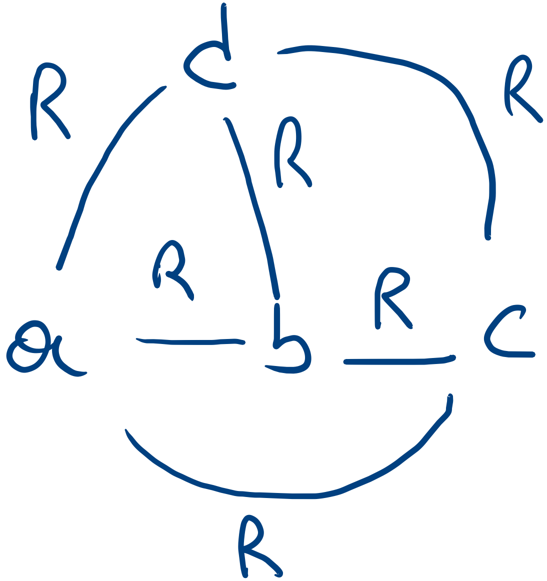
Ejemplos de grupos (además de los del práctico 7)

Ej: $\equiv \pmod{m}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$

$m \in \mathbb{Z}$

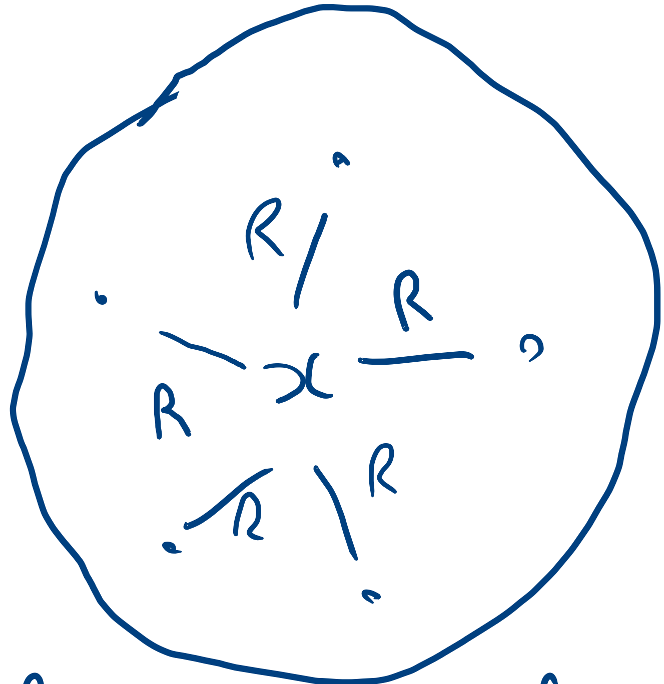
Entonces podemos considerar el cociente $\mathbb{Z}/\equiv \pmod{m}$,

es el conjunto de las clases de equivalencia de la relación



$\bar{x}$

$[x] = \{y \in G : xRy\}$



la clase de equivalencia de x

$$\mathbb{Z}/_{\equiv \ (\text{mód } m)} = \mathbb{Z}_m$$

¿Cuáles son los elementos de $\mathbb{Z}_m$?

Ej: $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ hay m

$\overline{0} = \overline{4}$, $\overline{1} = \overline{5}$ ..., $\overline{3} = \overline{-1}$ ...

son los restos mód m. $\{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$

La suma está bien definida (resultado de cuando vimos congruencias) ..

1) + es asociativa

2) tiene neutro: $\overline{0}$

3) $\overline{x}$ tiene inverso: $\overline{-x} = \overline{m-x}$
(opuesto)

$\Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_m, +)$ es un grupo.

Ej: Si tengo un conjunto M, con una operación asociativa $*$, que tiene neutro e, puedo tomar $U(M) = \{x \in M : \exists x^{-1}\}$

pensar cuál es

$(U(M), *)$ es un grupo:

1) $*$ es asociativo, falta ver que si $\left.\begin{array}{l}\exists x^{-1}\\ \exists y^{-1}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists (xy)^{-1}$

2) El neutro ya lo tenemos: $e^{-1} = e$

3) Hay inversos por la definición de U.

En particular, si tomamos $(M, *) = (\mathbb{Z}_m, \cdot)$ podemos considerar $U(\mathbb{Z}_m, \cdot) = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_m : \exists \bar{a}^{-1}\}$

$= \{\bar{a} : a \text{ coprimo con } m\}$

↳ podemos considerar $\bar{a} : a \in \{0, \dots, m-1\}$

$|U(\mathbb{Z}_m)| = \varphi(m)$

¿tiene inv? no $\quad \bar{1}^{-1} = 1 \quad$ no $\quad$ no $\quad$ no $\quad \bar{5}^{-1} = \bar{5}$

Ej: $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$U(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{1}, \bar{5}\} \quad \sigma(\bar{1}) = 1, \ \sigma(\bar{5}) = 2$

otro ejemplo

$U(M_n(\mathbb{R})) = GL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{matrices } 2\times 2 \\ \text{invertibles} \end{array} \right\}$

sabemos que es un grupo, (por lo visto recién)
pero si nos quedaba alguna duda,
en este caso recordamos de GAL 1
que el producto de dos matrices
invertibles es otra matriz invertible.

$\det(A) \neq 0$, $\det(B) \neq 0 \overset{?}{\Rightarrow} \det(AB) \neq 0$

pensar

2a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

¿ $A, B \in GL(2, \mathbb{R})$?

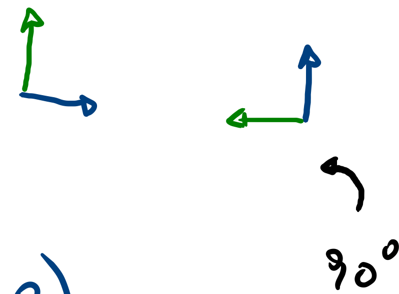
Puedo verificarlo con el determinante, o también habíamos aprendido un método para invertir la matriz

hacerlo.

$o(g) = \min\{n > 0 : g^n = e\}$ si hay

si no hay, $o(g) = \infty$

¿Cómo hallo $o(A)$? puedo ir calculando las potencias hasta llegar al neutro



en este caso el neutro es I_2 = identidad $2\times 2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A^2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A^3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^4 = I_2}$$

$o(A) = 4$

$\sigma(B) \to$ há ganho

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{AB}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{(AB)^2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{(AB)^3}{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{(AB)^4}{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

intuición: $(AB)^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ demostrarlo (por inducción)

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ sólo si $n=0$

Si $n>0$, $(AB)^n \neq I_2 \Rightarrow \theta(AB) = \infty$