6a) Sea G un grupo, H_1 y H_2 subgrupos de G

(se escribe $H_1 < G$, $H_2 < G$)

Probar que $(H_1 \cap H_2) < G$

es un subconjunto de G,

hay que probar que es subgrupo

1) $\left.\begin{array}{l} a \in H_1 \cap H_2 \\ b \in H_1 \cap H_2 \end{array}\right\} \Rightarrow ab \in H_1 \cap H_2$

2) $e \in H_1 \cap H_2$

3) $a \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow a^{-1} \in H_1 \cap H_2$

2) $\left.\begin{array}{l} e \in H_1 \\ e \in H_2 \end{array}\right\} \Rightarrow e \in H_1 \cap H_2$

condición 2 de $H_1 \cap H_2$

cond. 2 de H_1

cond 2 de H_2

cond 3 de H_1

3) Si $a \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a \in H_1 \Rightarrow a^{-1} \in H_1 \\ \text{y} \\ a \in H_2 \Rightarrow a^{-1} \in H_2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^{-1} \in H_1 \cap H_2$

cond. 3 de H_2

cond. 3 de $H_1 \cap H_2$

1) Si $a \in H_1 \cap H_2$ y $b \in H_1 \cap H_2$ $\Rightarrow$

$$\Downarrow \qquad y \qquad \Downarrow$$

$a \in H_1$ y $b \in H_1$ $\qquad$ $a \in H_2$ y $b \in H_2$

$\Downarrow$ cond 1 de H_1 $\qquad$ $\Downarrow$ cond 1 de H_2

$ab \in H_1$ $\qquad$ $ab \in H_2$

$$\Downarrow$$

$ab \in H_1 \cap H_2$ $\Leftarrow$

cond 1 de $H_1 \cap H_2$

65) $H_1 < G$, $H_2 < G$, probar que

si $H_1 \cup H_2 < G$ entonces $H_1 \subseteq H_2$ o $H_2 \subseteq H_1$

- Idea: Hacerlo por absurdo

Partimos de que es falsa la tesis

o sea: no es cierto que ($H_1 \subseteq H_2$ o $H_2 \subseteq H_1$)

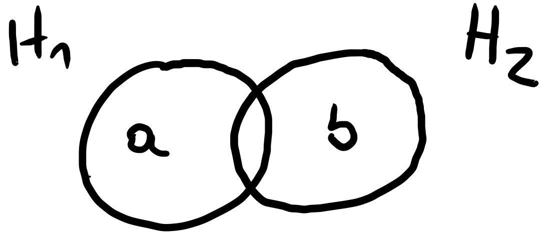
esto es: $H_1 \nsubseteq H_2$ y $H_2 \nsubseteq H_1$

ni $H_1 \subseteq H_2$ ni $H_2 \subseteq H_1$

Vamos a escribir las condiciones de una forma que nos sirva

$H_1 \not\subseteq H_2 \Rightarrow \exists a : a \in H_1$ y $a \notin H_2$

$H_2 \not\subseteq H_1 \Rightarrow \exists b : b \in H_2$ y $b \notin H_1$



$H_1 \cup H_2$ es subgrupo de G

cond. 1 de $H_1 \cup H_2$

$$\left.\begin{array}{l} a \in H_1 \cup H_2 \\ b \in H_1 \cup H_2 \end{array}\right\} \Rightarrow ab \in H_1 \cup H_2$$

Por otra parte podemos probar que $ab \notin H_1$:

(por absurdo) supongamos que $ab \in H_1$

$$\left.\begin{array}{l} a \in H_1 \Rightarrow a^{-1} \in H_1 \\ \qquad\qquad\quad ab \in H_1 \end{array}\right\} \Rightarrow a^{-1}ab \in H_1$$

$$b \in H_1 \quad ↯$$

entonces $ab \notin H_1$

Análogamente podemos probar que $ab \notin H_2$

entonces $ab \notin H_1 \cup H_2$ ↯

8a) G grupo, $a, b \in G$: $a \neq e$, $b \neq e$

$a^7 = e$, $b^3 = e$, $ab = ba^2$

Probar que G no es conmutativo

Ideas: Probar que $ab \neq ba$

absurdo: si $ab = ba$ $\Rightarrow$ $ba^2 = ba$

$\overset{\parallel}{ba^2}$

$$baa = ba$$

$$b^{-1}baa = b^{-1}ba$$

$$aa = a$$

$$\text{↯}. \quad \boxed{a^{-1}aa = a^{-1}a = e}$$

También podemos hacer la cancelativa directamente

Entonces $ab \neq ba$.

Encontramos dos elementos que no conmutan (justo en este ejercicio son a y b)

$\Rightarrow$ es falso que todos conmuten con todos

$\Rightarrow$ G no es conmutativo

8b) Probar que $(ab)^2 = b^2 a^6$

"todas las b a la izquerda y todas las a a la derecha"

$(ab)^2 = abab = ba^2 ab$

$= ba^2 ba^2 = baaba^2$

$= baba^2 a^2 = bab\,a^4$

$= bba^2 a^4 = b^2 a^6$

8c) Probar que $(ab)^3 = e$

$$(ab)^3 = (ab)(ab)(ab)$$

$$= b^2 a^6 ab = b^2 a^7 b$$

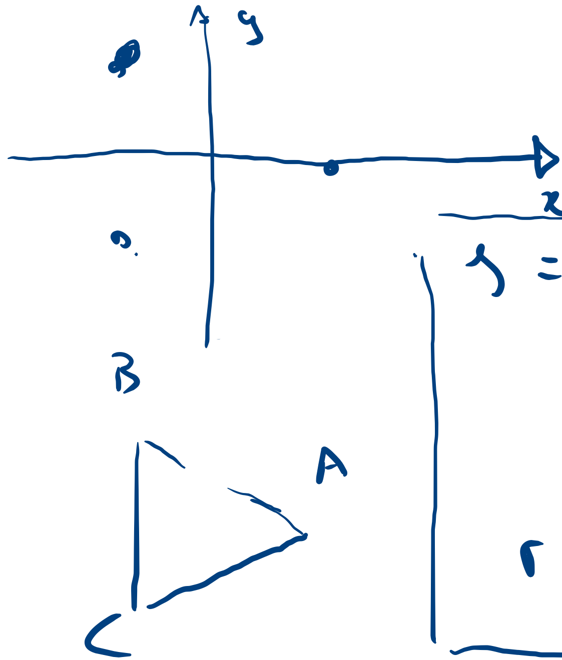
$$= b^2 e b = b^2 b = b^3 = e$$

Otra forma: $(ab)(ab)(ab)$

$$= abb^2a^6 = ab^3a^6 =$$

$$= aea^6 = aa^7 = e$$

5f) $G = D_3 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ son todos estos.



$rs = sr^2$ $\quad s^2 = e$

$r^3 = e$

s = simetría con respecto al eje x $\quad e = id$

r = rotación de $\frac{2\pi}{3}$

r^2: $A \to B$

$B \to C$

$C \to A$

$H = \{e, r, r^2 s, s\}$

$A \xrightarrow{s} A \xrightarrow{r^2} C$

$B \xrightarrow{s} C \xrightarrow{r^2} B$

$C \xrightarrow{s} B \xrightarrow{r^2} A$

Hay que probar. 2) $e \in H$ ✓

1) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$ (para el final)

Si $a = e$ o $b = e$ es obvio.

3) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

Si $a = e$ es obvio

Si $a = r$ $r^{-1} = r^2 \notin H$ (porque $r^3 = e$)

entonces H no es subgrupo de G

$H \not\leq G$