Grupos

G conjunto, $\cdot$ operación en G

As) $\cdot$ es asociativa

$$\forall a,b,c \in G \quad (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$$

Ne) $\exists\, e \in G$ (que después probás que es único) neutro de $\cdot$

$$\forall a \in G \quad e\cdot a = a \,,\; a\cdot e = a$$

In) $\forall a \in G \quad \exists!\, b \in G : a\cdot b = e \,,\; b\cdot a = e$

A este b lo llamamos inverso de a

Lo escribimos a^{-1}

$\boxed{\text{Ej 1e}}$

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

As) $\forall x\, y\, z$

$$(x*y)*z = x*(y*z)$$

$x =$ a, b o c

$y =$ a, b o c

$z =$ a, b o c

Tengo que ver la table

27 · 2 veces

$\circledast$ Un pequeño alivio es verificar Ne) antes porque

$$(e\cdot y)\cdot x = y\cdot x \quad \forall x$$

$$e\cdot(y\cdot x) = y\cdot x$$

(y lo mismo y, e, x

y, x, e)

completar

(Francisco)

a es el neutro de este ejemplo. (*)

la fila y la columna correspondientes (+)

a a, es igual a la del borde del tablero.

Gracias a esto, y a la propiedad (a)

sólo nos queda verificar $x =$ b o c

en vez de $27 \cdot 2$, son $8 \cdot 2$

$y =$ b o c

$z =$ b o c

b b b

b b c

b c b

b c c

c b b

c b c

c c b

c c c

Otra idea es verificar Inv) antes (Romina)
Gráficamente es ver que el neutro
está una vez en cada fila
y una vez en cada columna.
y según en qué lugar esté sabemos
cuál es el inverso

Mirando la tabla: $a^{-1} = a$ (el neutro $e^{-1} = e$)

$b^{-1} = c$ $\quad bc = e$, $cb = e$

$c^{-1} = b$ $\quad cb = e$, $bc = e$

Esto sirve para verificar As)

en las ternas de forma x, x^{-1}, x.

$(x \cdot x^{-1}) \cdot x = e \cdot x = x$ $\qquad (x^{-1}, x, x^{-1})$

$x \cdot (x^{-1} \cdot x) = x \cdot e = x$

Nos ahorramos bcb y cbc

quedan

bbb	cbb	
bbc	ccb	
bcc	ccc	

A verificarlas

completar las otras 3

$$(b\cdot b)\cdot b = c\cdot b = a$$

$$b\cdot(b\cdot b) = b\cdot c = a$$

$$(b\cdot b)\cdot c = c\cdot c = b$$

$$b\cdot(b\cdot c) = b\cdot a = b$$

$$(b\cdot c)\cdot c = a\cdot c = c$$

$$b\cdot(c\cdot c) = b\cdot b = c$$

$\boxed{\text{Ej 1g}}$ $G = \mathbb{Z}$

$$a \otimes b = ab - 2(a+b) + 6$$

Ne): $e \otimes a = a$, $a \otimes e = a$ $\forall a \in \mathbb{Z}$

¿existe un "e" que cumpla todo eso?

(Federico) En este ejemplo, $a \otimes b = b \otimes a$,

entonces sólo hace falta verificar $a \otimes e = a$

$\boxed{\forall a \in \mathbb{Z}}$ es una condición para cada a

$0 \otimes e = 0$, $1 \otimes e = 1$, $2 \otimes e = 2$, $(-1) \otimes e = -1$, ...

$$a \otimes b = ab - 2(a+b) + 6$$

$$a \cdot x - 2(a+x) + 6 = a \qquad \text{sol: } x = e$$

idea intuitiva (R_0)

Por la forma esta: 6, 2 aparecen... ¿será $x = 3$?

$$a \otimes 3 = a \cdot 3 - 2(a+3) + 6$$

$$= 3a - 2a - 6 + 6 = a \qquad \text{¡qué ojo!}$$

(Tercero) pero si no me daba cuenta, planteo con x

$$a \otimes x = ax - 2(a+x) + 6 = a$$

$$ax - 2a - 2x + 6 = a$$

$$(a-2)x = 3a - 6 = 3(a-2)$$

Tomo $a \neq 2$: $x = 3$

Una vez que lo obtuve, tengo que verificar

(si no verifica, es que no hay neutro)

Inv:

$a \otimes x = e^{3} \qquad x \otimes a = e$

como $a \otimes x = x \otimes a$ en este ejemplo

alcanza sólo con

sol: $x = a^{-1}$

$a \otimes x = e$

$ax - 2(a+x) + 6 = 3$

$ax - 2a - 2x + 6 = 3$

$(a-2)x = 3 + 2a - 6 = 2a - 3$

$(a-2)x = 3+2a-6 = 2a-3$

Si $a \neq 2$

$x = \dfrac{2a-3}{a-2}$ acá $2a-3$ tiene que ser divisible entre $a-2$.

(porque buscamos $x \in \mathbb{Z}$)

por ejemplo si $a=0$, $x = \dfrac{-3}{-2} \notin \mathbb{Z}$ $\lightning$

también si $a=2$ $0 = 2.2-3 = 1$ $\lightning$

con uno solo de estos contraejemplos alcanza.

La propiedad Inv) no se cumple

$\Rightarrow$ $(\mathbb{Z}, \otimes)$ no es un grupo.