1485000 ¿cómo se descompone en factores primos?

Podemos empezar a dividirlo por distintos primos.

Es muy grande, en particular está el riesgo de que haya primos grandes (que no sabemos darnos cuenta si lo dividen)

Por ejemplo, podemos separarlo en factores más chicos, y descomponerlos

$$1485000 = 1485 \cdot 1000$$

ya descompusimos el factor 1000

$$1000 = 10^3, \quad 10 = 2 \cdot 5 \Rightarrow 10^3 = (2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$$

Falta descomponer 1485.

$9 = 10 - 1$

$11 = 10 + 1$

Es múltiplo de 5 (última cifra)

Es múltiplo de 3 (suma de las cifras)

Es múltiplo de 11 (suma alternada de las cifras)

Son "trucos" para darnos cuenta "a ojo"

Si no, dividimos. No importa el orden, mientras no se pierda nada.

$$\begin{array}{l|l} 1485 & 5 \\ \hline 48 & 297 \\ \ \ 35 & \\ \ \ \ \ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 297 & 3 \\ \hline 27 & 99 \\ \ \ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 99 & 11 \\ \hline 0 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 9 & 3 \\ \hline 0 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 3 & 3 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$$

$$1485 = 5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 3$$

$$= 3^3 \cdot 5 \cdot 11$$

Ahora

$$1485000 = (1485)(1000) = (3^3 \cdot 5 \cdot 11)(2^3 \cdot 5^3)$$
$$= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^4 \cdot 11$$

¿Cuántos son los divisores de 1485000?

$a \mid b \iff$ todo primo de la descomposición de a, aparece en la descomposición de b, con el mismo exponente o mayor

factores $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\cdots} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$

posibilidades

hay (4) 0, 1, 2, 3 doses

hay (4) 0, 1, 2, 3 treses

hay (5) 0, 1, 2, 3, 4 cincos

hay (2) 0, 1 once

Son pasos independientes y no repiten resultado!

Por la regla del producto,

hay $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2$ divisores positivos distintos.

$= 160$ (de 1485000)

En general, si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son primos distintos, y $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$, la cantidad de divisores distintos del número $p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ es

$$(a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_k+1)$$

Un número $a \in \mathbb{N}$ es cuadrado perfecto, si $\exists\, x \in \mathbb{N} : x^2 = a$ (x se llama "raíz cuadrada de a")

En este caso, si

$x = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ es la descomp. en factores primos de x

$$a = x^2 = \left(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}\right)^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k}$$

es la descomp. en factores primos de a (es única)

¿no uso que $\mathbb{Z}$ es $\mathbb{Z}$?

$\Rightarrow$ todos los exponentes de la desc. en fac. primos de a son pares (también vale el recíproco)? → completar a es cuadrado perfecto

$\Updownarrow$ (2)

La descomposición en factores primos de a tiene todos sus exponentes pares

$\Updownarrow$ (1)

La cantidad de divisores positivos de a es impar

(1) Sea N la cantidad de divisores de a, donde $a = p_1^{\beta_1} \cdots\cdots p_k^{\beta_k}$

(2) uso que 2 es 2

$N = (\beta_1+1) \cdots\cdots (\beta_k+1)$

N es impar

$\Updownarrow$

$(\beta_1+1), \ldots, (\beta_k+1)$ son todos impares

$\Updownarrow$

$\beta_1, \ldots, \beta_k$ son todos pares

Si p y q son primos distintos, probar que $\sqrt{pq}$ es irracional.

$$\sqrt{pq} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{q}$$

$\sqrt{p}$ → irracional

$\sqrt{q}$ → irracional.

dem. vista antes,

ojo, el producto de dos irracionales a veces puede dar racional (ejemplo: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$)

Hay que usar que son distintos y son primos.

sabemos que pq no es cuadrado perfecto ($\neq p^1 \cdot q^1$ (exp'tes impares))

$\Rightarrow \sqrt{pq}$ no es entero.

¿es racional? imitar la demostración ①

¿Cómo sería por absurdo?

Partimos de que $\sqrt{pq}$ es racional, entonces escribimos $\sqrt{pq} = \frac{a}{b}$ $a, b \in \mathbb{N}$ distintos de 0.

elevo al cuadrado.

$$pq = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$pq = \frac{a^2}{b^2}$$

Si queremos, podemos tomar $\frac{a}{b}$ irreducible, o sea $mcd(a,b) = 1$

$$pq\, b^2 = a^2$$

$$\Downarrow$$

$$b \mid a^2$$

Todos los factores primos de b tienen que estar en a^2 $\Rightarrow$ tienen que estar en a

$\Rightarrow b \mid a \Rightarrow mcd(a,b) = b$

$\Rightarrow b = 1$

Si $\sqrt{pq}$ es racional, entonces también es entero

pero entero no es, porque pq no es cuadrado perfecto.

Pregunta

¿ $\exists$ algún número $n \in \mathbb{N}$, tal que $\sqrt{n}$ sea racional pero no entero?

$$\sqrt[b]{30^a} = 30^{\frac{a}{b}} = p \cdot q \qquad \log_{30}(p \cdot q) = \frac{a}{b}$$

$$30^a = p^b q^b \ldots$$