24/05

Práctico 8

Repaso Teórico:

- **T. Lagrange:** G grupo finito y $H < G \Rightarrow |H| \mid |G|$.

  $\mathrm{Im}\varphi \quad \langle \varphi(g) \rangle \Rightarrow o(\varphi(g)) \mid |\mathrm{Im}\varphi|$

  En particular $o(g) = |\langle g \rangle|$ divide a $|G|$.

- **Homomorfismo:** $\varphi: G \to K \quad (G,*), (K,\cdot)$ grupos f.g.

  $\varphi(g * g') = \varphi(g) \cdot \varphi(g')$.

- **Ppdes. de morfismos:** $\varphi: G \to K$ morfismo $\Rightarrow$ $\varphi(e_G) = e_K$

  $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$

  $\varphi(g^n) = \varphi(g)^n$

- **Ker(φ)** $= \{g \in G : \varphi(g) = e_K\} < G$
- **Im(φ)** $= \{k \in K : \exists g \in G \ f(g) = k\} = \{f(g) : g \in G\} < K$

Ejercicio 9. Verificar si las siguientes funciones son o no morfismos de grupo.

En cada caso hay que ver si $f(A * B) = f(A) * f(B)$

a. La función traza $tr : (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +) \to (\mathbb{R}, +)$ ✓

b. La función $f : (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +) \to (\mathbb{R}, +)$ dada por $f(A) = tr(A^2)$. ✗

c. La función determinante $det : (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ (recordar que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es el conjunto de matrices invertibles $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$). ✓

d. La función $f : (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ dada por $f(A) = det(A^2)$. ✓

e. La función $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ dada por $f(\lambda) = \lambda A$ donde $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es una matriz dada (en caso de no serlo siempre, hallar condiciones sobre A para que f sea morfismo).

f. La función trasponer $T : (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +) \to (M_{n\times n}(\mathbb{R}), +)$ dada por $T(A) = A^t$. ✓

g. La función trasponer $T : (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ dada por $T(A) = A^t$. ✗

h. La función $f : (\mathbb{R}^3, +) \to (\mathbb{R}^*, \cdot)$ dada por $f(x, y, z) = e^{x-2y+z}$ (sug. pensarlo como composición de dos morfismos).

(a) ¿$Tr(M+N) = Tr(M) + Tr(N)$? ✓

(b) $Tr((M+N)^2) = Tr(M^2) + Tr(N^2)$

$n=1$ $\quad M = 1 \quad N = -1 \quad \to Tr((M+N)^2) = 0$

$Tr(M^2) + Tr(N^2) = 2$

$n=2$ $\quad M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Tr((M+N)^2) = Tr\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = 50$

$Tr(M^2) = Tr\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = 18$

$Tr(N^2) = Tr\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 8$

$\Rightarrow Tr((M+N)^2) = 50$

$Tr(M^2) + Tr(N^2) = 26$

c) ¿ $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$?

Si, por GAL

d) ¿ $\det((AB)^2) = \det(A^2)\cdot\det(B^2)$?

Si, $\det((AB)^2) = \det(AB)\det(AB) = \det(A)\det(B)\det(A)\det(B)$
$= \det(A^2)\det(B^2)$

(Porque es conmutativo $(\mathbb{R}^*, \cdot)$
y por GAL.

f) ¿ $(A+B)^t = A^t + B^t$? (Grupo Aditivo)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^t + B^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{pmatrix} = (A+B)^t$

· Es morfismo $\forall n$.

g) ¿ $(AB)^t = A^t B^t$?
$B^t A^t$ (GAL)

$\to A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\to B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ $AB^t = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

$A^t B^t = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

Ejercicio 10. Sea $\varphi : G_1 \to G_2$ un morfismo de grupos finitos. $< |G_2|$

a. Sea $g \in G_1$, probar que $o(\varphi(g))$ divide a $\mathrm{mcd}(|G_1|, |\mathrm{Im}(\varphi)|)$.

b. Probar que si $|G_1|$ y $|G_2|$ son coprimos, entonces φ es trivial. $\varphi(g) = e \quad \forall g \in G.$

c. Si φ es un isomorfismo de grupos y $g \in G_1$. Probar que el orden de g en G_1 es igual al orden de $\varphi(g)$ en G_2. $o(g) = o(\varphi(g)) \quad \forall g \in G.$

d. Probar que $\mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no son isomorfos.

Idea:

a) $\varphi : G_1 \to G_2$ morfismo. $\qquad \mathrm{Im}\,\varphi < G_2$ (subgrupo)

Tenemos que ver 1) $o(\varphi(g)) \mid |\mathrm{Im}(\varphi)|$. $\qquad \varphi(g) \in \mathrm{Im}\,\varphi$

$\boxed{\text{Lagrange}: H = \langle \varphi(g) \rangle,\ G = \mathrm{Im}\,\varphi}$

2) $o(\varphi(g)) \mid |G|$

$o(\varphi(g)) \mid o(g) \mid |G| \qquad$ Transitividad.

$\to \left(\underbrace{\varphi(g)^n = \varphi(g^n)}_{\text{morfismo}} \Rightarrow \text{si } g^n = e \Rightarrow \varphi(g)^n = e. \right)$

b) Hay que ver que $\varphi(g) = e \ \forall g \in G$, es decir, $o(\varphi(g)) = 1 \ \forall g \in G$.

$\rightsquigarrow o(\varphi(g)) \mid |G_1|$

$\rightsquigarrow o(\varphi(g)) \mid \underbrace{|\mathrm{Im}\,\varphi| \mid |G_2|}_{\text{Lagrange}}$

$\Big\}$ $|G_1|$ y $|G_2|$ coprimos $\Rightarrow o(\varphi(g)) = 1$.

c) φ iso $\Rightarrow o(g) = o(\varphi(g))$.

$\to$ Queremos ver que $o(g)$ divide a $o(\varphi(g))$ y al revés.

$\Rightarrow \varphi(g)^n = \varphi(g^n) \Rightarrow$ si $n = o(g)$ $\quad g^n = e \Rightarrow \varphi(g)^n = \varphi(g^n) = \varphi(e) = e$

$\Rightarrow \varphi(g)^n = e$

$\Rightarrow \boxed{o(\varphi(g)) \text{ divide a } n.}$ $\qquad$ Ej 4a.

$\Rightarrow \varphi(g)^n = \varphi(g^n)$, si $\underbrace{\varphi(g)^n}_{\varphi(g^n)} = e \Rightarrow$ como φ es isomorfismo

$\Rightarrow \boxed{g^n = e}$

$\Rightarrow$ Tomando $n = o(\varphi(g))$

Tenemos que $o(g) \mid n$.

(d) $(\mathbb{Z}_4,+)$ y $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$

$o(\bar{0})=1 \longrightarrow o((\bar{0},\bar{0}))=1$

$o(\bar{1})=4 \qquad o((\bar{1},\bar{0}))=2$

$o(\bar{2})=2 \qquad o((\bar{0},\bar{1}))=2$

$o(\bar{3})=4 \qquad o((\bar{1},\bar{1}))=2$

Si existiera $\varphi:\mathbb{Z}_4\to\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ iso $\Rightarrow o(\varphi(1))=4$, pero en $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ no hay elementos de orden 4.

Ejercicio 11. En cada caso verificar si los siguientes grupos son isomorfos o no; en caso que lo sean, encontrar un isomorfismo entre ellos.

- **a**. Los grupos $(\mathbb{Z}_4,+)$ y $(U_{10},\cdot)$. → Son cíclicos de orden 4. → Mandamos generador en generador
- **b**. Los grupos D_3 y S_3 (ambos con la composición).