Práctico 4: TFA

Teorema: $a = 2^{e_2} 3^{e_3} 5^{e_5} \dots$

$b = 2^{f_2} 3^{f_3} 5^{f_5} \dots$

entonces (1) $a \mid b$ sii $e_i \leq f_i$

(2) $mcd(a,b) = 2^{\min(e_2,f_2)} 3^{\min(e_3,f_3)} 5^{\min(e_5,f_5)}$.

(3) $mcm(a,b) = 2^{\max(e_2,f_2)} \dots$.

Corolario: $n = p_1^{e_{p_1}} p_2^{e_{p_2}} \dots p_k^{e_{p_k}}$

$\Rightarrow Div_+(n) = \{ p_1^{c_1} \dots p_k^{c_k}$ con $c_i \leq e_{p_i} \}$

$\# Div_+(n) = (e_{p_1}+1) \dots (e_{p_k}+1)$

$n = m^k \iff e_{p_i}$ son múltiplos de k.

Ejercicio 11. Sea (p_n) la sucesión de los números primos, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, etc. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $p_1 p_2 \dots p_n + 1 \geq p_{n+1}$. ¿Es cierto que $p_1 p_2 \dots p_n + 1$ es primo para todo $n \in \mathbb{N}$?

¿Inducción?

P.B. $\left[\begin{array}{l} p_1 + 1 \geq p_2 \\ 2+1 \geq 3 \quad \checkmark \end{array} \right.$

H.I $[\, p_1 \dots p_n + 1 \geq p_{n+1}$

¿ $p_1 \dots p_{n+1} + 1 \geq p_{n+2}$?

$p_1 \dots p_n (p_{n+1} - 1 + 1) + 1 = p_1 \dots p_n + 1 + p_1 \dots p_n (p_{n+1} - 1)$

$\geq p_{n+1} + p_1 \dots p_n (p_{n+1} - 1)$

—— × ——

(TFA) Supongamos por absurdo que $p_{n+1} > p_1 \dots p_n + 1$

$\Rightarrow p_1 \dots p_n + 1$ se descompone como producto de primos, pero

ningún $p_i \mid (p_1 \dots p_n + 1)$, pues $\begin{cases} p_i > (p_1 \dots p_n + 1) & \text{si } i > n \\ p_i \mid p_1 \dots p_n \Rightarrow p_i \nmid (p_1 \dots p_n + 1) & \text{si } i \leq n \end{cases}$ ↯

No es cierto: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \times 509$.

Ejercicio 12. ¿Existen dos cuadrados perfectos cuya diferencia sea 311? ¿Y dos cubos cuya suma sea 311? (Sug. Observar que $f(x) = x^3 + y^3$ tiene raíz $x = -y$ y usar esto para factorizar $x^3 + y^3$).

¿$\exists\, a^2, b^2$ tq $a^2 - b^2 = 311$?

$(a+b)(a-b) = 311$, como 311 es primo tenemos dos opciones

$\begin{cases} a+b = 1 \\ a-b = 311 \end{cases}$ $\begin{cases} a+b = 311 \\ a-b = 1 \end{cases}$

Supongamos que $a, b \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b = 311 \\ a-b = 1 \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix} a = 156 \\ b = 155 \end{matrix}}$ $\rightsquigarrow \underbrace{a^2}_{} - \underbrace{b^2}_{} = 311$

¿$\exists\, a^3, b^3$ tq $a^3 + b^3 = 311$?
$a \geq 0$
$b > 0$

$(a+b)(a^2 + b^2 - ab) =$

$a^3 + b\cancel{a^2} + \cancel{b^2}a + b^3 - \cancel{a^2}b - a\cancel{b^2}$

311 es primo $\Rightarrow \begin{cases} a+b = 311 \\ a^2 + b^2 - ab = 1 \end{cases}$ o $\begin{cases} a+b = 1 \\ a^2 + b^2 - ab = 311 \end{cases}$ x

$\quad (a-b)^2 + ab = 1$

$a^2 + b^2 - 2ab + ab$ $\quad \geq 0 \quad$ Si $ab = 0$ ↯ 311 no es cubo perfecto

Tiene que ser $ab = 1 \to a = b$

$311 = 2(a^3)$ ↯

No hay soluciones (positivas).

Ejercicio 5. Hallar los números naturales $n \leq 1000$ que tienen exactamente 3 divisores positivos distintos.

$n = 2^{e_2} 3^{e_3} 5^{e_5}$

$\# Div_+(n) = (e_2+1)(e_3+1)(e_5+1)\ldots$

$\# Div_+(n) = 3 \iff$ algún $e_i = 2$ y el resto es 0, pues 3 es primo.

$\iff \boxed{n = p_i^2}$

Si ponemos la restricción $n \leq 1000 \Rightarrow p \leq \sqrt{1000} \leq 31$

Si n tiene dos divisores primos $p, q \Rightarrow 1, p, q, p \cdot q$ son divisores de n

$\Rightarrow n$ tiene mas de 3 divisores positivos

$\Rightarrow n$ tiene un sólo divisor primo, $n = p^k$, como tiene 3 divisores pos. $k = 2$.

Los números son $X = \{p^2 : p \leq 31\}$

Ejercicio 13. En un manicomio hay 2021 habitaciones numeradas con los números $1, 2, 3, \ldots, 2021$. En un principio están todas las puertas cerradas. Cuando pasa el primer paciente abre la puerta de cada habitación,

luego pasa el segundo paciente y cierra las puertas $2, 4, 6, 8, \ldots$. Pasa el tercer paciente y cambia de estado las puertas $3, 6, 9, 12, \ldots$ (es decir, la cierra si estaba abierta y la abre si estaba cerrada) y así hasta que pasa el paciente 2021 que cambia de estado la puerta 2021. ¿Cuántas puertas abiertas quedan luego de pasar los 2021 pacientes?

Supongamos que hay 10 habitaciones numeradas del 1 al 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	~~2~~	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
1	~~2~~	~~3~~	~~4~~	5	6	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
1	~~2~~	~~3~~	4	5	6	7	8	~~9~~	~~10~~
1	~~2~~	~~3~~	4	~~5~~	6	7	8	~~9~~	10
1	~~2~~	~~3~~	4	~~5~~	~~6~~	7	8	~~9~~	10
1	~~2~~	~~3~~	4	~~5~~	~~6~~	~~7~~	8	~~9~~	10
1	~~2~~	~~3~~	4	~~5~~	~~6~~	~~7~~	~~8~~	~~9~~	10
1	~~2~~	~~3~~	4	~~5~~	~~6~~	~~7~~	~~8~~	9	10
1	~~2~~	~~3~~	4	~~5~~	~~6~~	~~7~~	~~8~~	9	~~10~~

Quedaron abiertas 1, 4, 9.

¿La puerta $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ queda abierta cuando los exp. e_i son pares?

$$\left(\begin{array}{l} e_i \text{ par} \Leftrightarrow e_i + 1 \text{ par} \\ \Leftrightarrow \# \text{ imp. de Div. por.} \\ \Leftrightarrow \text{cuadrado perfecto.} \end{array} \right)$$