22-03

Práctico 4: TFA

TFA: Todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se puede escribir de forma única (salvo el orden) como $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ p_i son primos distintos.

Teorema: $a = 2^{e_2} 3^{e_3} 5^{e_5} \ldots$

$b = 2^{f_2} 3^{f_3} 5^{f_5} \ldots$

1) $a | b \iff e_2 \leq f_2 \ldots \quad e_i \leq f_i \ \forall i$
2) $mcd(a,b) = 2^{\min(e_2,f_2)} 3^{\min(e_3,f_3)} \ldots$
3) $mcm(a,b) = 2^{\max(e_2,f_2)} 3^{\max(e_3,f_3)} \ldots$

Ejemplo:

$a = 36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad e_2 = 2 \quad e_3 = 2 \qquad e_i = 0 \quad \forall i \neq 2,3$

$b = 12 = 2^{2} \cdot 3^{1} \qquad f_2 = 2 \quad f_3 = 1 \qquad f_i = 0 \quad \forall i \neq 2,3$

$a | b \iff e_2 \leq f_2 \quad e_3 \leq f_3 \quad e_i \leq f_i$

$2 \leq 2$ ✓ $\quad 2 \not\leq 1 \quad 0 \leq 0$ ✓

$b | a \iff 2 \leq 2 \quad 1 \leq 2 \quad 0 \leq 0$ ✓

$mcd(a,b) = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdots = 12.$

Corolario: $\cdot\ Div_+(n) = \{ p_1^{c_1} \cdots p_k^{c_k} \quad c_i \leq e_i \}$

$n = 12: \quad 2^0 \cdot 3^0,\ 2^1 \cdot 3^0,\ 2^2 \cdot 3^0,\ 2^1 \cdot 3^1,\ 2^1 \cdot 3^2,\ 2^0 \cdot 3^1,\ 2^0 \cdot 3^2,$
$2^2 \cdot 3^2,\ 2^0 \cdot 3^2$

$\cdot\ \# Div_+(n) = (e_1 + 1) \cdots (e_k + 1)$

$\cdot$ n cuadrado perfecto sii $2 | e_i$

$\cdot\ n = m^k \iff k | e_i \quad \forall i$

Ejercicio 1. Se consideran los siguientes números:

$$a = 1485000; \quad b = 15^4 \cdot 42^3 \cdot 56^5; \quad c = 15!; \quad d = 1485000^3; \quad e = 15!^5$$

a. Halllar la descomposición factorial de esos números.

b. ¿Cuántos divisores tienen?

c. ¿Es alguno de ellos cuadrado perfecto?

$(a^b)^c = a^{bc}$

$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

$b = 15^4 \cdot 42^3 \cdot 56^5 = (3 \cdot 5)^4 \, (2 \cdot 3 \cdot 7)^3 \, (2^3 \cdot 7)^5$

$= 3^4 \cdot 5^4 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3 \cdot 2^{15} \cdot 7^5$

$= 2^{18} \cdot 3^{7} \cdot 5^{4} \cdot 7^{8}$

$\# Div_+(b) = (e_2 + 1)(e_3 + 1)(e_5 + 1)(e_7 + 1)$

$= (19)(8)(5)(9)$

No es cuadrado perfecto porque $e_3 = 7 \neq 2$

$n = 2^{e_2} 3^{e_3} 5^{e_5} \ldots$

$2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \ldots | n$

$2^2 | n \iff$

$n = 8 \cdot k \qquad k \neq 2$

$\Rightarrow 16 \nmid k$

$c = 15! = (15)(14)(13)(12)(11)(10)(9)(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)$

$= (3\cdot5)(2\cdot7)(13)(2^2\cdot3)(11)(2\cdot5)(3^2)(2^3)(7)(2\cdot3)(5)(2^2)(3)(2)$

$= 2^{11}\cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$

$\# Div_+(c) = (e_2+1)(e_3+1)(e_5+1)(e_7+1)(e_{11}+1)(e_{13}+1)$

$= (11+1)(6+1)(3+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 12\cdot7\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2$

No es cuadrado perfecto porque $e_{11} = 1 \neq \dot{2}$

$e = 15!^5 = 2^{55}\cdot 3^{30}\cdot 5^{15}\, 7^{10}\, 11^5\, 13^5 = (55+1)(30+1)(15+1)(10+1)(5+1)(5+1)$

$e_{11} = 5 \neq \dot{2}$

Si es $e = m^5$

Ejemplo: (1) $n = 2\cdot3\cdot5\cdot7$

Son divisores: $1,\ 2\cdot3\cdot5\cdot7,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 2\cdot3,\ 2\cdot5,\ 2\cdot7,$

Pero $2^2 \nmid n,\ 3^2\nmid n,\ 2^2 3,\ 2^2 3^2,\ 2\, 3^2\, 5 \nmid n$

(2) $n = 5^{10}$

$1,\ 5,\ 5^2, \dots, 5^{10}$, pero $5^{11}, 5^{12}, 5^{20}$ no lo dividen.

Ejercicio 3. Decidir si existen enteros positivos a y b que satisfagan

a. $a^2 = 8b^2$. **b.** $a^2 = 3b^3$. **c.** $7a^2 = 11b^2$.

(a) $a = 2^{e_2}\, 3^{e_3} \cdots p_k^{e_{p_k}} \Rightarrow a^2 = 2^{2e_2}\, 3^{2e_3} \cdots p_k^{2e_{p_k}}$

$b = 2^{f_2}\, 3^{f_3} \cdots p_m^{e_{p_m}} \Rightarrow 8b^2 = 2^3 2^{2f_2}\, 3^{2f_3} \cdots p_m^{2f_{p_m}}$

$= 2^{3+2f_2}\, 3^{2f_3} \cdots$

Por unicidad de la factorización

$$a^2 = 8b^2 \iff \begin{cases} 2e_2 = 3 + 2f_2 \\ 2e_3 = 2f_3 \\ \vdots \\ 2e_{p_k} = 2f_{p_k} \\ 2e_{p_m} = 2f_{p_m} \end{cases} \qquad 2e_2 = 2(f_2+1)+1 \ ⚡$$

(b) $a^2 = 3b^3$

$a^2 = 2^{2e_2} \cdot 3^{2e_3} \cdot 5^{2e_5} \cdots$

$3b^3 = 3 \cdot 2^{3e_2'} \cdot 3^{3e_3'} \cdot 5^{3e_5'} \cdots$

$= 2^{3e_2'} \cdot 3^{3e_3'+1} \cdot 5^{3e_5'} \cdots$

$$a^2 = 3b^2 \iff \begin{cases} 2e_2 = 3e_2' \\ 2e_3 = 3e_3' + 1 \\ \vdots \\ 2e_5 = 3e_5' \end{cases}$$

Por ejemplo: $e_2 = e_2' = 0$ ... $e_i = e_i' = 0 \quad \forall i \neq 3$

$e_3 = 2 \quad e_3' = 1$

$$\left.\begin{array}{l} a = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdots = 9 \\ b = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdots = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^2 = 9^2 = 3^4 \quad \checkmark \\ 3b^3 = 3 \cdot 3^3 = 3^4 \end{array}$$

(c) $7a^2 = 11b^2$

$$\begin{cases} 7a^2 = 2^{2e_2} \, 3^{2e_3} \, 5^{2e_5} \, 7^{2e_7+1} \cdots \\ 11b^2 = 2^{2e_2'} \, 3^{2e_3'} \, 5^{2e_5'} \, 7^{2e_7'} \, 11^{2e_{11}'+1} \end{cases}$$

Por unicidad de la factorización

$$\begin{cases} 2e_2 = 2e_2' \\ \vdots \\ 2e_7 + 1 = 2e_7' \\ 2e_{11} + 1 = 2e_{11}' + 1 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow 2e_7 + 1 \neq \dot{2} \quad \lightning$$

Ejercicio 9. Demostrar que $\sqrt{pq}$ y $\log_{30}(pq)$ son irracionales para cualquier par de primos distintos p, q.

Suponemos por absurdo que $\sqrt{pq} = \frac{m}{n}$ con $\operatorname{mcd}(m,n) = 1$

$\Rightarrow pq = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow n^2 pq = m^2$

$p \mid m^2$, veremos que $p \mid n^2$, lo cual es absurdo.

$p^2 \mid m^2$

$n^2 \cdot q \cdot p = p^2 \cdot \frac{m^2}{p^2}$

$n^2 q = p \cdot \boxed{m^2/p^2} \Rightarrow p \mid n^2 \cdot q$

$\Rightarrow p \nmid q \quad \Rightarrow p \mid n^2$

$\Rightarrow p \mid n$

$p \mid \operatorname{mcd}(n,m) = 1 \quad \lightning$

$\log_b a = c \iff b^c = a$

$\log_{30} pq = \frac{m}{n} \iff 30^{m/n} = pq$

$\hookrightarrow \operatorname{mcd}(m,n) = 1$ ...

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow 30^{m/n} \notin \mathbb{Z}$

Ejercicio 8. Demostrar que $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$ si y solamente si n tiene un número impar de divisores positivos.

$n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$

$\sqrt{n} = p_1^{e_1/2} \cdots p_k^{e_k/2} \in \mathbb{Z} \iff e_i/2 \in \mathbb{Z} \quad \forall i$

$\iff e_i = \dot{2}$

$\iff (e_i + 1) \neq \dot{2}$

$\iff \underbrace{(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_k+1)}_{= \text{Div}_+(n)} \neq \dot{2}$