Práctico 7: Grupos.

· Def (grupo): G cjto, $*: G\times G \to G$ tal que

(1) (Asociativa) $(x*y)*z = x*(y*z)$

(2) $\exists e\in G$ tq $e*g = g = e*g$ $\forall g\in G$ (Neutro)

(3) (Inverso) $\forall g\in G$ $\exists g^{-1}\in G$ tq $gg^{-1} = e = g^{-1}*g$.

· Def (subgrupo): $H\subseteq G$ subconjunto t.q.

(1) $e_G \in H$

(2) (Cerrado por inversos) $h\in H \Rightarrow h^{-1}\in H$

(3) (Cerrado por la operación) $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 * h_2 \in H$.

$G = (\mathbb{Z}, +, 0)$

$H = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

¿H es subgrupo de G? No tiene inversos

$H' = \{\dots, -10, -8, -6, -4, -2, 2, 4, 6 \dots\}$

$0 \notin H$

$H'' = \{\dots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$ — Tiene inversos — Tiene neutro — Cerrado por la op.

Ejercicio 3. Sea $(G,\cdot)$ un grupo con neutro e. Probar las siguientes afirmaciones:

a. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ para todo $a, b\in G$.

b. $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ para todo $a\in G$, $n\in\mathbb{N}$.

→ **c.** Si $xg = xh$ o $gx = hx$ para algún $x\in G$ entonces $g = h$.

→ **d.** Si $gh = e$ o $hg = e$ entonces $h = g^{-1}$.

→ **e.** Si $(ab)^3 = e$ entonces $(ba)^3 = e$.

f. $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ para todo $a, b\in G \Leftrightarrow G$ es abeliano.

g. $(ab)^2 = a^2b^2$ para todo $a, b\in G \Leftrightarrow G$ es abeliano.

(c) $\exists x\in G$ $xg = xh$

$\Rightarrow x^{-1}(xg) = x^{-1}(xh)$

$\Rightarrow (x^{-1}x)g = (x^{-1}x)h$

$\Rightarrow g = h$.

(d) $gh = e$

$gg^{-1} = e$

$\overset{(c)}{\Rightarrow} h = g^{-1}$.

(e)

$(ab)^3 = e \Rightarrow (ba)^3 = e$

$\underbrace{ab}\,abab = e$

$\Rightarrow \quad b^{-1} = ababa$ y el inverso a izq es a der. $\Rightarrow$ $bababa = e$

ababab

Ej: $(\mathbb{Z}_3, +)$ $\qquad \mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$

$b = 0 \quad a = 1 \quad \Rightarrow \quad ababab = 1+0+1+0+1+0 = 0$

pero $ab = 1+0 = 1 \neq 0$.

$(ba)^3 = bababa = 0+1+0+1+0+1 = 0$.

En grl: $(ab)^3 = a+b+a+b+a+b = 3a+3b = 0$

idem $(ba)^3 = 0$

Ejercicio 4. Pruebe que la composición en el grupo de permutaciones S_n verifica la propiedad asociativa

$S_n = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ biyectiva$\}$

$\circ$ es la composición de funciones.

$\rightsquigarrow$ $g \circ f$ está bien definida y es biyectiva (comp. de biyectivas)

$\circ : G \times G \to G$. $\qquad G = S_n$.

$\rightsquigarrow$ $(f \circ g) \circ h\,(x) = (f \circ g)\,(h(x))$

$= f(g(h(x)))$

$f \circ (g \circ h)(x) = f(g \circ h(x))$

$= f(g(h(x)))$.

Ejercicio 5. Para cada uno de los grupos G, investigar si H es un subgrupo de G:

$0 = n \cdot 0 \in H$ ✓

$m \in H \Rightarrow m = \pm nk$

$\Rightarrow -m = -nk$.

Cerr. por inv.

Cerrado por la op.

√ **a.** $G = (\mathbb{Z}, +)$ y $H = n\mathbb{Z}$ el conjunto de los enteros múltiplos de n (para $n \in \mathbb{Z}$ dado).

√ **b.** $G = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ con el producto y $H = \mathbb{R}^+$ el conjunto de los reales positivos.

√ **c.** $G = GL_2(\mathbb{R})$ (matrices invertibles 2×2 con coeficientes reales) con el producto usual de matrices y $H = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : ac \neq 0\}$. $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in H$

√ **d.** $G = GL_2(\mathbb{R})$ y $H = \{M \in G : \det(M) = 1\}$.

✗ **e.** $G = \mathbb{Q}^+$ con el producto y $\boxed{H = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a \equiv 0 \pmod 7,\ \mathrm{mcd}(b,7) = 1\}.}$

✗ **f.** $G = D_3 = \{\mathrm{id}, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ el grupo dihedral (donde $r^3 = s^2 = \mathrm{id}$ y $rs = sr^2$) y $H = \{\mathrm{id}, r, r^2 s, s\}$.

√ **g.** $G = S_3$ el grupo de permutaciones y $H = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)\}$.

(d) $H = \{ M \in G : \det(M) = 1 \}$

- $Id \in H$ ✓
- $\det(A)\det(B) = \det(AB)$ $\Rightarrow Id = AA^{-1}$

$\Rightarrow 1 = \det(Id) = \det(A)\det(A^{-1})$

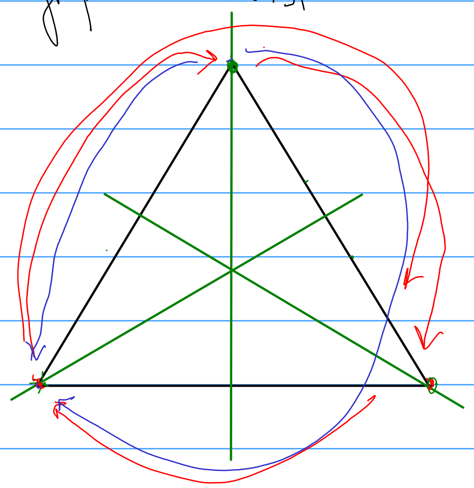
$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

$\Rightarrow$ Si $\det(A) = 1$, es decir $A \in H$ $\Rightarrow \det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow A^{-1} \in H$.

- Si A, B tienen det 1 $\Rightarrow AB$ tiene det 1.

(e) $\cancel{1} \in H \Leftrightarrow b = a$ con $a \equiv 0\ (7)$ y $mcd(a, 7) = 1 \Rightarrow a \not\equiv 0\ (7)$ ↯

(f) D_3 es el grupo de transformaciones del plano que fijan T on Δ.



Elementos de D3

- Id
- S simetría
- R rotación
- SR

(1) $Id \in D_3$ ✓ el D_3 ntiene al neutro

(2) Veamos que H no es cerrado por inversos.

$r^{-1} = r^2$, y $r^2 \neq id$

$r^2 \neq s$ (s fija puntos y r no)

$r^2 \neq r^2 s$ (sino $Id = s$)

$r^2 \neq r$

$\Rightarrow r^2 \neq id, s, r, r^2 s \Rightarrow r^2 \notin H$.

$S_n = \{ f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \text{ biyectivas} \}$

$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

$Id \in H$ ✓

¿Cerrado por inverso? $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ✓

¿Cerrado por op? $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ✓