05/05

Práctico 7: Grupos.

Def: G cjto. $*: G\times G \to G$ tq.

(1) asociativa: $(x*y)*z = x*(y*z)$

(2) neutro: $\exists\, e\in G$ tq $e*x = x = x*e$ $\forall x\in G$

(3) inversos: $\forall x\in G$ $\exists\, x'$ $x*x' = e = x'*x$.

es un grupo, si conmuta es abeliano.

$(\mathbb{Z}, +, 0)$ es un grupo.

$(GL_2(\mathbb{R}), *, id)$ es un grupo.

Ejercicio 1. Investigar si los siguientes conjuntos con las respectivas operaciones que se definen son grupos:

a. El conjunto $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con la operación el producto usual de matrices: $A*B = AB$.

b. El conjunto $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con la operación: $A*B = AB + BA$.

c. El conjunto $\mathbb{R}^2$ con la operación: $(x_1, x_2)*(y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_1 + y_2)$.

d. $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ y $*$ el producto matricial.

e. El conjunto $\{a, b, c\}$ con la operación $*$ definida mediante la tabla:

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

f. El conjunto $\{a, b, c, d\}$ con la operación $*$ definida mediante la tabla:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	a	a
c	c	a	b	b
d	d	a	b	c

g. El conjunto $\mathbb{Z}$ con la operación $\otimes$ definida por : $a\otimes b = ab - 2(a+b) + 6$.

(a) 0 no tiene inverso $\Rightarrow$ no es un grupo.

(b) $0*A = 0A + A0 = 0$

y 0 no puede ser el neutro.

$\Rightarrow 0$ no tiene inverso.

Neutro: $\forall A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$A*e = Ae + eA = A$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e + e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e \to e = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

conmuta

No es grupo.

El neutro es único: $\begin{cases} \exists e\in G & \forall g\in G \quad e*g = g = g*e \\ \exists e'\in G & \forall g\in G \quad e'*g = g = g*e'. \end{cases}$

$\Rightarrow e*e' = e'$ porque e es neutro

$e*e' = e$ porque e' es neutro

$\Rightarrow e' = e*e' = e$

El inverso es único (Ej 4)

$G = \{a, b, c\}$

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

· a es el neutro

· asociativo: $a(bc) = bc = (ab)c$

neutro neutro

⋮

· Inversos: a^{-1} , $b^{-1}=c$ $c^{-1}=b$.

(f).

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	a	a
c	c	a	b	b
d	d	a	b	c

Tenemos que ver existencia de neutro e inversos y asociativa.

Se repiten elementos en la misma fila $\Rightarrow$ no es grupo.

Proposición: En cada fila (columna) aparecen todos los elementos del grupo.

Es lo mismo que probar que fijo $a \in G$, $G \to G$, $b \mapsto a*b$ es sobre

Sea G un grupo. En la tabla, la fila g (con $g \in G$) consiste en $\{g*h$ con $h \in G\}$, entonces queremos ver que dado un elemento cualquiera $x \in G$ está en la fila. Esto es, $\exists\, h \in H$ tq $g*h = x$.

Podemos tomar $\boxed{h = g^{-1}*x}$ $(g*g^{-1})*x = x$ ✓

Ejercicio 2. Sea $G = \{e, a, b, c, d, f\}$ tal que $(G, \cdot)$ es un grupo. Completar la tabla de Cayley si se tiene la información parcial siguiente:

·	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	d	f	c
b	b	e	a	f	c	d
c	c	f	d	e	b	a
d	d	c	f	a	e	b
f	f	d	c	b	a	e

$f \cdot c = b$ y $c \cdot f = a$ ⇝ no es conmutativo.

$c \cdot f = f \cdot c \Leftrightarrow c$ y f conmutan

El neutro siempre conmuta $e \cdot f = f \cdot e$ $\forall f$.

El inverso de g conmuta con g: $g g^{-1} = g^{-1} g = e$.

Cuentas

Queremos ca

$c(ac) = c \cdot d = b = fc \Rightarrow (ca)c = fc$

$ca = f$

$a \cdot b = e$

$a \cdot b^2 = b$ (multiplico a derecha por b)

$ab^2 = a^2$ ($b = a^2$ por tabla)

$= a \cdot a$

$\Rightarrow b^2 = a$ (ppd. c ej 3 "cancelativa")

$b^3 = e$

En $(\mathbb{R}^+, *, 1)$

$(-1)^2 = +1$

$\Rightarrow -1$ es su inverso.

$(-1)^2 = 1 \neq -1$