Práctico 1: Sistemas de numeración y divisibilidad, Mcd y Mcm

Teorema de División entera: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0 \Rightarrow \exists!\ q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $a = bq + r$ con $0 \leq r < |b|$.

Ejercicio 5. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18.

$a = 18 \cdot q + 5$

$a^2 - 3a + 11 = 18 \cdot q' + r$, queremos calcular r

$a^2 - 3a + 11 = (18q + 5)^2 - 3(18q + 5) + 11$

$= 18^2 \cdot q^2 + 2 \cdot 5 \cdot 18q + 25 - 3 \cdot 18q - 15 + 11$

$= 18(18q^2 + 10q - 3q) + \underbrace{21}_{18+3}$

$= 18\underbrace{(18q^2 + 10q - 3q + 1)}_{q'} + \underbrace{3}_{r}$

Ejercicio 7. Demostrar que el producto de tres naturales consecutivos es múltiplo de 6.

Opción 1 | $M = n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$ es múltiplo de 6

$\Rightarrow$ $2 | n$ o $2 | n+1$ o $2 | n+2$

$3 | n$ o $3 | n+1$ o $3 | n+2$

$\Rightarrow 6 | n(n+1) \cdot (n+2)$ (no lo vimos)

Ejemplo: si $2 | n$ y $3 | n+1$ $\Rightarrow 2 \cdot 3 | n(n+1) | n(n+1)(n+2) = M$ ✓

si $2 | (n+1)$ y $3 | (n+1)$ $\Rightarrow$ ¿$2 \cdot 3 | n(n+1)(n+2)$?

Dados tres naturales consecutivos, al menos uno es par, y al menos uno es múltiplo de 3.

Asumiendo:

Si p y q son coprimos y $p | a$, $q | a \Rightarrow pq | a$

obtenemos el resultado.

$n = a \cdot 2 + r \Rightarrow$ Si $r = 0$ $n = 2$

Si $r = 1 \Rightarrow n+1$

$n+1 = a \cdot 2 + r + 1$

$= (a+1) \cdot 2$

$n = a \cdot 3 + r \Rightarrow$ Si $r = 0$ $n = 3$

$r = 1$

$\Rightarrow n+1 = a \cdot 3 + 1 + 1 = a \cdot 3 + 2$

$n+2 = a \cdot 3 + 2 + 1 = (a+1) \cdot 3$

Opción 2 $M = n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ y queremos ver que $M = q\cdot 6$

Hay 6 opciones para el resto de n: $n = 6a + r'$ con $0 \leq r' \leq 5$

$r'=0$: $M = (6a)\cdot(6a+1)(6a+2)$ ✓

$6 \mid n \mid n(n+1)(n+2) = M$

$r'=1 \Rightarrow n = 6\cdot a + 1$, sustituimos:

$$M = (6a+1)\left((6a+2)(6a+3)\right)$$
$$= (6a+1)\cdot\left(6^2a^2 + 2\cdot 6a + 3\cdot 6a + 6\right)$$
$$= (6a+1)\cdot 6\left(6a^2 + 2a + 3a + 1\right)$$
$$\Rightarrow 6 \mid M.$$

$r'=2 \Rightarrow n = 6a+2$

$$M = \left(\underbrace{(6a+2)(6a+3)}_{\dot{6}}\right)(6a+4)$$

$r'=3 \Rightarrow n = 6a+3$

$$M = \left((6a+3)(6a+4)\right)(6a+5)$$
$$\left(6^2a^2 + \underbrace{3\cdot 6a + 4\cdot 6a}_{\dot{6}} + 12\right)(6a+5)$$

$r'=4 \Rightarrow n = 6a+4$

$$M = (6a+4)(6a+5)(\underbrace{6a+6}_{\dot{6}})$$

$r'=5 \Rightarrow n = 6a+5$

$$M = (6a+5)(\underbrace{6a+6})(6a+7)$$

Opción 3 Por inducción:

Queremos ver que $\forall n \geq 1$ $M = n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ es múltiplo de 6.

- $n=1$: $n\cdot(n+1)\cdot(n+2) = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ ✓
- Supongamos que vale para $n=k \Rightarrow$ para $n=k+1$ tenemos:

  $n\cdot(n+1)(n+2) = (k+1)(k+2)(k+3) = (k+1)(k+2)\cdot k + (k+1)(k+2)\cdot 3$

  Por hipótesis inductiva $6 \mid k\cdot(k+1)(k+2)$, veamos que $6 \mid 3(k+1)(k+2)$
- Si $k+1 = 2q+1 \Rightarrow k+2 = 2\cdot(q+1) \Rightarrow 2 \mid k+1$ o $2 \mid k+2$

  $\Rightarrow 6 \mid 2\cdot 3 \mid 3(k+1)(k+2)$ (Ejercicio 6a)

Ejercicio 6. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Probar o refutar dando un contraejemplo las siguientes afirmaciones:

a. Si $a|b$ y $c|d$ entonces $ac|bd$.

b. Si $a|b$ entonces $ac|bc$.

c. Si $a \nmid bc$ entonces $a \nmid b$ y $a \nmid c$.

d. Si $ac|bc$ entonces $a|b$.

e. Si $a|bc$ entonces $a|b$ o $a|c$.

f. Si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$.

g. Si $4|a^2$ entonces $2|a$.

h. Si $9|b+c$ entonces $9|b$ o $9|c$.

i. Si $a+c|b+c$ entonces $a|b$.

(a) $a|b \Rightarrow b = a \cdot q$ $\Rightarrow bd = aq \cdot c \cdot q' = (ac) \cdot qq'$
$c|d \Rightarrow d = c \cdot q'$ $\Rightarrow ac|bd$.

(b) $a|b \Rightarrow b = a \cdot q$ | Si $c=0 \Rightarrow$ no está definido.
$bc = aq \cdot c$ | Si $c \neq 0$ $ac|bc$.

(c) $a \nmid bc$

Supongamos que $a|b \Rightarrow b = a \cdot q$
$\Rightarrow bc = a(q \cdot c) \Rightarrow a|bc$ $\lightning$

(d) Supongamos que $c \neq 0$.
$ac|bc \Rightarrow bc = ac \cdot q$
$bc - acq = 0$
$(c \cdot (b - aq) = 0)$ y $c \neq 0$
$b - aq = 0$

(e) $bc = a \cdot q$, queremos ver que $b = a \cdot q'$, o $c = aq'$
o dar un contraejemplo.

- $a=3$ $b=3$ $c=1$
$a|bc$ y $a|b$ (no es contraejemplo)

- $a=5$ $b=2$ $c=5$
$a|bc$ y $a|c$ (no es contraejemplo)

- $a=6$ $b=2$ $c=3$
$6|2 \cdot 3 = 6$ pero $6 \nmid 2$ y $6 \nmid 3$ (Contraejemplo)

- $a=6$ $b=3$ $c=4$
$6|3 \cdot 4 = 12$ pero $6 \nmid 3$ y $6 \nmid 4$ (Contraejemplo)

(f) $a|c$ y $b|c$
Ej: $2|c$ y $3|c \Rightarrow 2 \cdot 3|c$ ¿vale en general?

- $a=2 \quad b=4 \quad c=12$

$\begin{cases} 2 \mid 12 \\ 4 \mid 12 \end{cases}$ pero $2 \cdot 4 = 8 \nmid 12$

- $a = 6 \quad b = 8 \quad c = 24$

$\begin{cases} 6 \mid 24 \\ 8 \mid 24 \end{cases}$ pero $48 \nmid 24$

(g) ¿$4 \mid a^2 \Rightarrow 2 \mid a$?

- Supongamos $2 \nmid a \Rightarrow a = (2q+1)$

$\Rightarrow a^2 = (2q+1)^2$

$= 4q^2 + 4q + 1$

$= 4(q^2+q)+1 \Rightarrow$ El resto de dividir a^2 entre 4 es 1 (y no 0) $\lightning$

$4 \mid a^2 \Rightarrow 2 \mid 4 \mid a^2$

$2 \mid a \cdot b \Rightarrow 2 \mid a \ \circ\ 2 \mid b$

Es un corolario del Lema de Euclides, no lo vimos aún.

(h) $b=8 \quad c=1$, $9 \mid 8+1$ pero $9 \nmid 8$ y $9 \nmid 1$.

$b=15 \quad c=3 \quad 9 \mid 15+3$ pero $9 \nmid 15$ y $9 \nmid 3$

(i) $4 \mid 12$, luego $3+1 \mid 11+1$ pero $3 \nmid 11$.

Ejercicio 9. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

a. $99 \mid 10^{2n} + 197$

b. $56 \mid 13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$

(a) Inducción: $n=0$: $99 \mid 10^0 + 197 = 1 + 197 = 198 = 2 \cdot 99$ ✓

Supongamos que $10^{2n} + 197 = 99 \cdot q$ con $q \in \mathbb{Z}$.

$n+1$: $10^{2(n+1)} + 197 = 10^{2n} \cdot 10^2 + 197$

$= 10^{2n}(99+1) + 197$

$= 10^{2n} \cdot 99 + 10^{2n} + 197$

$= 99(10^{2n} + q)$

(b) $n=0$: $56 \mid 13^0 + 28\cdot 0 - 84\cdot 0 - 1 = 1-1 = 0$ ✓

$n=1$: $56 \mid 13^2 + 28\cdot 1 - 84\cdot 1 - 1 = 112 = 56\cdot 2$

Supongamos que $13^{2n} + 28\cdot n^2 - 84n - 1 = 56\cdot q$ para $n\geq 1$.

Entonces $13^{2(n+1)} + 28(n+1)^2 - 84(n+1) - 1 = 13^2\cdot 13^{2n} + 28n^2 + 2\cdot 28n + 28 - 84n - 84 - 1$

$= (168+1)\cdot 13^{2n} + 28n^2 + 56n - 84n - 1 - 56$

$= \underbrace{13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1}_{(56\cdot q)} + \underbrace{168}_{56\cdot 3}\cdot 13^{2n} + 56n + 56$

$= 56(q + 3\cdot 13^{2n} + n + 1)$

$\Rightarrow 56 \mid 13^{2(n+1)} + 28(n+1)^2 - 84(n+1) - 1$.

Ejercicio 10. Sea $n \in \mathbb{N}$ cuya representación en base 10 es $a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$. Demostrar que:

a. $2|n$ si y sólo si $2|a_0$.

b. $4|n$ si y sólo si $4|a_1a_0$.

c. $8|n$ si y sólo si $8|a_2a_1a_0$.

d. Establecer el resultado general sugerido por los casos anteriores.

e. Investigar si 32 divide a 1.273.460.

(a) Escribimos n en base 10: $n = a_0\cdot 10^0 + a_1\cdot 10 + \dots + a_k\cdot 10^k$.

$2|10 \Rightarrow 2|10\cdot 10 \Rightarrow 2|10^i \quad \forall i\geq 1$.

Entonces $2 \mid a_1\cdot 10 + \dots + a_k\cdot 10^k$ siempre, esto es

$n = a_0\cdot 10^0 + 2\cdot q$ para cierto $q\in\mathbb{N}$.

Luego $2|n \Leftrightarrow 2|a_0$

(b) Como antes, $n = a_0\cdot 10^0 + \dots + a_k\cdot 10^k$

$4|100 \Rightarrow 4|10\cdot 100 \cdots \Rightarrow 4|10^i \quad \forall i\geq 2$

Entonces $4 \mid a_2\cdot 10^2 + \dots + a_k\cdot 10^k$

Luego $4|n \Leftrightarrow 4 \mid a_0\cdot 10^0 + a_1\cdot 10^1 = a_1a_0$.

(c) $8|1000 = 10^3 \Rightarrow 8|10\cdot 1000 \dots \Rightarrow 8|10^i \quad \forall i\geq 3$, luego

$8 \mid a_3\cdot 10^3 + \dots + a_k\cdot 10^k$ y

$8|n \Leftrightarrow 8 \mid a_0\cdot 10^0 + a_1\cdot 10^1 + a_2\cdot 10^2 = a_2a_1a_0$

(d) En general: $2^i|n \Leftrightarrow 2^i \mid a_{i-1}a_{i-2}\cdots a_1a_0$.

Sabemos que $2 | 10 \Rightarrow 2^i | 10^i$ (Ejercicio 6 parte a)

$\Rightarrow$ $\Rightarrow 2^i | 10^i \cdot 10$, $2^i | 10^i \cdot 10^2 \dots$ es decir

$2^i | 10^j \quad \forall j \geq i$

$\Rightarrow 2^i | a_j \cdot 10^j \quad \forall j \geq i$

Luego $2^i | n = a_0 \cdot 10^0 + \dots + a_k \cdot 10^k$ si y sólo si

$2^i | a_0 \cdot 10^0 + \dots + a_{i-1} \cdot 10^{i-1}$