Práctico 1: Sistemas de numeración y divisibilidad.

Teorema: Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ $b \neq 0$ $\exists!\, q, r$ tales que

$$a = bq + r \quad \text{con} \quad 0 \leq r < |b|$$

Aplicación: escribir $x \in \mathbb{N}$ en base $b \geq 2$:

Dado $x \in \mathbb{N}$ $\exists$ $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ $a_n \neq 0$ tales que

$$x = a_0 \cdot b^0 + \dots + a_n \cdot b^n$$

$0 \leq a_i < b$. Los a_i son únicos.

$x = (a_n \dots a_0)_b$.

$160 = 10 \cdot 16 = (10)_{16}$

Notación: En base $b \geq 10$ reemplazamos los números > 9 por letras.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ~~A~~ B C D E F

$160 = 10 \cdot 16 = (A0)_{16}$

$$\begin{aligned} 10 = 5 \times 2 &= (2 \times 2 + 1) \times 2 \\ &= 2^3 + 2^1 \\ &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ &= (1010)_2 \end{aligned}$$

Ejercicio 1. *Sistemas de numeración.*

a. Escribir en las bases 2, 4 y 16 los números decimales 137 y6243
Escribir en la base 28 el número decimal 16912.

b. Escribir en las bases 2 y 10 los números hexadecimales $A7$, $4C2$, $1C2B$ y $A2DFE$.

c. Escribir en las bases 10 y 16 los números binarios 11001110, 00110001, 11110000 y 01010111.

d. Escribir en la base decimal el número dados en la base indicada $OJO_{(25)}$.

(a) $137 = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2 + \dots + a_n \cdot 2^n$

$$\begin{aligned} &= 1 + 136 = 1 + 2 \cdot 68 = 1 + 2^2 \cdot 34 \\ &= 1 + 2^3 \cdot 17 \\ &= 1 + 2^3 (2 \cdot 8 + 1) \\ &= 1 + 2^3 (2^4 + 1) \\ &= 1 + 2^3 + 2^7 \\ &= 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 \\ &\quad + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 \\ &= (10001001)_2 \end{aligned}$$

$$137 = 1 + 2^3 + 2^7 \qquad 4 = 2^2$$

$$= 1 + 2 \cdot 2^2 + 2^{2\cdot 3+1}$$

$$= 1 + 2 \cdot 4^1 + 4^3 \cdot 2$$

$$= 1 \cdot 4^0 + 2 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^3$$

$$= (2021)_4$$

$$16 = 2^4$$

$$137 = \underbrace{1 \cdot 4^0 + 2 \cdot 4} + 2 \cdot 4^3$$

$$= 9 + 2 \cdot 4 \cdot 4^2$$

$$= 9 \cdot 16^0 + 8 \cdot 16^1$$

$$= (89)_{16}$$

Base 25

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
										10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

L	M	N	O
21	22	23	24

$$(OJO)_{25} = 24 \cdot 25^0 + 19 \cdot 25^1 + 24 \cdot 25^2$$

$$= 24 + 475 + 24 \cdot 625$$

$$= 24 + 475 + 15000$$

$$= 15499$$

$$= 9 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^4$$

$$= (15499)_{10}$$

Ejercicio 2.

En este ejercicio vamos a utilizar la siguiente numeración de los **28** símbolos:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	_
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

El objetivo de este ejercicio es asociar una secuencia de números enteros a una secuencia de palabras (por ejemplo una frase) de la siguiente manera. Primero separamos el texto en bloques de a tres caracteres (incluyendo el espacio en blanco); por ejemplo si el texto es "MUY BIEN" nos quedan tres bloques: $\boxed{M|U|Y}\boxed{\_|B|I}\boxed{E|N|\_}$. A cada bloque de tres letras le hacemos corresponder un entero entre 0 y 28^3-1 con el siguente criterio. Si tenemos un bloque de letras $\boxed{X|Y|Z}$, le asociamos el bloque de enteros según la tabla de arriba $\boxed{x|y|z}$, y a este bloque le asociamos el entero $x28^2+y28^1+z(28)^0$. Por ejemplo, al bloque $\boxed{M|U|Y}$, letra a letra le corresponde el bloque $\boxed{12|21|25}$ al cual le hacemos corresponder el entero $12(28)^2+21(28)^1+25(28)^0$.

Asocie la secuencia de enteros que se obtienen de la frase: "Me encanta el carnaval".
Halle la frase correspondiente a la secuencia de enteros: 768, 7048, 337, 6397.

$\boxed{x|y|z} \mapsto x\cdot 28^2 + y\cdot 28^1 + z\cdot 28^0$

Me_ | $12\cdot 28^2 + 4\cdot 28^1 + 27\cdot 28^0 = 9547$

Enc | $4\cdot 28^2 + 13\cdot 28^1 + 2\cdot 28^0 = 3502$

ant | $0\cdot 28^2 + 13\cdot 28^1 + 20\cdot 28^0 = 384$

a_e | $0\cdot 28^2 + 27\cdot 28^1 + 4\cdot 28^0 = 760$

l_c | $11\cdot 28^2 + 27\cdot 28^1 + 2\cdot 28^0 = 9382$

arn | $0\cdot 28^2 + 18\cdot 28^1 + 13\cdot 28^0 = 517$

ava | $0\cdot 28^2 + 22\cdot 28^1 + 0\cdot 28^0 = 616$

l__ | $11\cdot 28^2 + 27\cdot 28^1 + 27\cdot 28^0 = 9407$

$x \quad y \quad z$

$768, = 28\cdot 27 + 12 = 28^2\cdot 0 + 28\, 27 + 28^0\cdot 12$ | A | _ | M |

$7048, = 28\cdot 251 + 20 = 28^2\, 8 + 28\, 27 + 28^0\, 20$ | I | _ | T |

$337, = 28\cdot 12 + 1 = 28^2\, 0 + 28\, 12 + 28^0\, 1$ | A | M | B |

$6397 = 28^2\, 8 + 28^1\cdot 4 + 13$ | I | E | N |

Ejercicio 3. En un libro de mil hojas numeradas del 1 al 1000 se arrancan todas las hojas cuyo número contenga algún dígito impar (p. ej. se eliminan las páginas $7, 12, 93, 100$ pero no la 248).

a. ¿Qué página ocupará la posición 100 luego de que le fueran arrancadas dichas hojas?

b. ¿Qué posición ocupará la página que aparece con el número 888?

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \ldots \\ 2, & 4, & 6, & 8, & 20, & 22, & 24, & 26, & 28, & 40 \ldots \end{array}$$

$$x\,y\,z = x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + z \cdot 10^0$$
$$\mapsto \frac{x \cdot 10^2}{8} + \frac{y \cdot 10}{4} + \frac{z \cdot 10^0}{2}$$
$$= \frac{x}{2} \cdot 5^2 + \frac{y}{2} \cdot 5 + \frac{z}{2} \cdot 5^0$$

$$x\,y\,z \longmapsto \left(\frac{x}{2}\ \frac{y}{2}\ \frac{z}{2}\right)_5$$

$$888 \longmapsto (4\,4\,4)_5 = 4 \cdot 5^0 + 4 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^2$$
$$= 4 + 20 + 100$$
$$= 124.$$

página antes de arrancar hojas $\longmapsto$ pagina desp. de arrancar hojas

$$x\,y\,z \longrightarrow \frac{x}{2} \cdot 5^2 + \frac{y}{2} \cdot 5 + z \cdot 5^0.$$

$$8\,0\,0 \longleftarrow (400)_5$$

$$100 = 25 \cdot 4 = 4 \cdot 5^2$$
$$= (4\,0\,0)_5$$

$\Rightarrow$ le corresponde la página 800

Ejercicio 4. El *Juego del Polinomio* consiste en que alguien piensa un polinomio de coeficientes enteros no negativos y de grado cualquiera, y nosotros tenemos que adivinar de qué polinomio se trata. Para averiguar el polinomio se nos permite preguntar a la otra persona cuánto vale su polinomio evaluado en los valores que nos parezcan oportunos. El objetivo del juego es adivinar el polinomio en la menor cantidad de evaluaciones.

Probar que siempre es posible averiguar el polinomio incógnita con dos evaluaciones.

[Sugerencia: elegir el segundo punto de evaluación luego de conocer el resultado del primero.]

$P(x) = a_0 \cdot x^0 + \dots + a_n x^n$ $\quad a_n \neq 0$.

$P(0) = a_0$

$P(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_n \geq a_n$ $\forall n$.

$P(10) = a_0 + a_1 \cdot 10 + \dots + a_n \cdot 10^n$

Tomamos $b > P(1)$ y evaluamos en b:

$P(b) = a_0 \cdot b^0 + a_1 \cdot b^1 + \dots + a_n \cdot b^n$

con $0 \leq a_i \leq a_0 + \dots + a_n < b$

Tenemos $P(b)$ expresado en base b.

$\Rightarrow$ Tenemos únicos a_i tq $P(x) = a_0 \cdot x^0 + \dots + a_n x^n$

Ejemplo:

$\boxed{P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 1}$

$P(1) = 4 + 3 + 1 = 8$

Tomamos $b = 10$ para simplificar cuentas.

$P(10) = 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1$

$\Rightarrow a_3 = 4 \quad a_2 = 3 \quad a_0 = 1$

$P(1) = 3 \Rightarrow$ Tomamos $b = 10$.

$P(10) = 21 = 2 \times 10 + 1$

$\Rightarrow P(x) = 2x + 1$.

$P(1) = 4 \Rightarrow$ Tomamos $b = 10$ de nuevo.

$P(10) = 4000$

$= 4 \cdot 10^3$

$\Rightarrow P(x) = 4x^3$.

(Para simplificar cuentas nos conviene tomar potencias de 10)