Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Funciones de variable compleja.
Curso 2022

Práctico 3 - Series de Potencia

1. Hallar el radio de convergencia y una fórmula explícita para la función suma en los siguientes casos:
   a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+i)z^n$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^n$
2. Expandir en potencias de z las siguientes funciones y encontrar el radio de convergencia de cada una:
$$\text{a) } \frac{1}{(1-z)^2} \qquad \text{b) } \frac{1}{(1+z)^5} \qquad \text{c) } \frac{1}{4+z} \qquad \text{d) } \frac{z+2}{(1+3z)^2}$$
3. Consideremos la serie de potencia de la forma
$$\frac{1}{2}z + z^2 + \frac{1}{8}z^3 + \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{32}z^5 + \frac{1}{16}z^6 + \frac{1}{128}z^7 + \frac{1}{64}z^8 + \dots$$
   Calcular el radio de convergencia.
4. *a*) ¿Se puede definir $\log(1-z)$ de manera continua en el disco de radio 1?
   b) Hallar radio de convergencia y fórmula explícita para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.
5. *a*) Consideremos dos series de potencias $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n$ con radios de convergencia $R_a, R_b > 0$. Probar que si existe un abierto U entorno de z_0, con $U \subset B(z_0, R_a) \cap B(z_0, R_b)$ tal que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n \quad \forall z \in U$$
   entonces $a_n = b_n$ $\forall n$.
   b) Supongamos que $f(z)$ es una función analítica y que en un entorno de cero es desarrollable en series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Demuestre que si $f(z)$ es par entonces $a_n = 0$ para todo n impar y que si $f(z)$ es impar entonces $a_n = 0$ para todo n par.
6. Este ejercicio muestra otra forma de ver que e^z coincide con la serie de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Es por esto que la idea es que tomen la definición de e^z como $e^{x+iy} = e^x\,(cosy + isiny)$.
   a) Sea $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = e^x$. Pruebe utilizando el teorema de Taylor y del resto de Lagrange que
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
   b) ¿Converge la serie de potencias anterior uniformemente a g en $\mathbb{R}$? ¿Y en un compacto? (*Sugerencia: ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie?*)
   c) Sea $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$. Demuestre que
$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$
   Para esto asumir que si $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son funciones holomorfas que coinciden en el eje real entonces $f = g$.